1. Hausaufgaben

zur Vorlesung „Mathematik für InformatikerInnen I"

1.1 a) Stellen Sie für die folgenden beiden Aussageformen jeweils fest, ob eine Tautologie, eine Antinomie, oder keines von beiden vorliegt:

1. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$,
2. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg(P \wedge \neg Q))$.

b) Finden Sie für die folgenden beiden Aussageformen jeweils eine äquivalente Aussageform, in der R nur höchstens einmal vorkommt.

1. $(P \Rightarrow (Q \wedge R)) \Rightarrow R$,
2. $R \Rightarrow (P \Rightarrow (Q \wedge R))$.

Hinweis: Sie müssen alle Ihre Behauptungen beweisen, wobei es Ihnen überlassen bleibt, beim Beweis Wahrheitstafeln oder andere gültige Argumente heranzuziehen. Antinomie bedeutet: Negation einer Tautologie. [(2+2)+(2+2)P.]

1.2 a) Geben Sie folgende Aussagen unter ausschließlicher Benutzung der Quantoren $\forall$, $\exists$, der logischen Operationssymbole $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$ sowie der Prädikate $Q(x)$: „x ist rational" und $K(x, y)$: „x ist kleiner als y" wieder; das Universum ist die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen.

1. Jede reelle Zahl ist rational.
2. Es existiert eine irrationale Zahl. („Irrational" steht für „nicht rational".)
3. Es existiert keine größte irrationale Zahl.
4. Zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen liegt eine rationale Zahl.

b) Geben Sie Aussagen an, die zu den Verneinungen der Aussagen in a) äquivalent sind, und zwar

– verbal (sprachlich flüssig!),
– formal (nach dem gleichen Schema wie in a)).

Dabei sollen „nicht" (oder andere sprachliche Verneinungen) und „$\neg$" nicht vor irgendwelchen Quantoren erscheinen. [4+8 P.]

1.3 a) Beweisen Sie folgende Aussagen für beliebige Mengen M, N, P:

1. $M \subset N \Rightarrow M \setminus P \subset N \setminus P$,
2. $M \subset N \Rightarrow P \setminus N \subset P \setminus M$,
3. $(M \cup (N \cap P)) \cap P = (M \cup N) \cap P$.

b) 1. Bleibt die Aussage a) 1 richtig, wenn man „$\Rightarrow$" durch „$\Leftarrow$" ersetzt?
2. Bestimmen Sie alle Mengen M mit der Eigenschaft $M \setminus M = M$.
3. Geben Sie für jede der beiden folgenden Mengen eine Liste ihrer Elemente an:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_n), \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_n);$$

hierbei ist $\mathbb{N}_n := \{1, 2, \ldots, n\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Ihre unter b) aufgestellten Behauptungen müssen Sie vollständig beweisen.

[(1+1+2)+(2+2+4) P.]

1.4 **Mengen**
Beweisen Sie oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel), daß die folgenden Aussagen jeweils für beliebige Mengen L, M, N gelten:

(1) $M \cup N = M \cap N \Rightarrow M = N$.
(2) $M \setminus N = N \setminus M \Rightarrow M = N$.
(3) $L \cup (M \setminus N) = (L \cup M) \setminus N$.
(4) $L \cap (M \setminus N) = (L \cap M) \setminus N$.
(5) $L \times (M \setminus N) = (L \times M) \setminus (L \times N)$.
(6) $L \times (M \times N) = (L \times M) \times N$.

[6 P.]

1.5 Überprüfen Sie jeweils, welche der Eigenschaften injektiv, surjektiv und bijektiv auf die folgenden Abbildungen zutreffen und beweisen Sie Ihre Behauptungen:

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^0, \quad n \mapsto f(n) : n - 1$.

b) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto g(n) := \begin{cases} n^2, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 2n, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$

c) $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^0, \quad (n, m) \mapsto h(n, m)) := \begin{cases} n - m, & \text{falls } m \leq n, \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$

($\mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$) [2+4+2 P.]

1.6 M sei eine Menge, und die Abbildung $s : M \times M \to M \times M$ sei durch $s((x, y)) = (y, x)$ für alle $x, y \in M$ definiert. Zeigen Sie, daß s bijektiv ist, und beschreiben Sie s^{-1}.

[4 P.]

Da es zwei gleichmächtige Mengen sind, muss es eine bijektive Funktion geben.

Achtung: Immatrikulationsnummer nicht vergessen!

Abgabetermin: 15. November 2005