2. Hausaufgaben

zur Vorlesung „Mathematik für InformatikerInnen I“

2.1 Sei K ein Körper. Beweisen Sie:
Für $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in K$, $a_1 \neq 0, \ldots, a_n \neq 0$ gilt: $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i - a_{i+1}}{a_i a_{i+1}} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1}$. [7 P.]

2.2 a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$. Zeigen Sie:
Aus $a \geq b$ folgt $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$.
(Anleitung: Führen Sie die Annahme $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ zu einem Widerspruch (sog. indirekter Beweis).)

(b) Zeigen Sie:
Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$ gilt: $|a - b| < c \Leftrightarrow b - c < a$ und $a < b + c$.

[$6 + 3 = 9$ P.]

2.3 Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ in der Form $r + si$ mit reellen Zahlen r, s an, und berechnen Sie jeweils $|z|$.

a) $z = \frac{1}{5i}$,

b) $z = \frac{1 - 4i}{2 + 3i}$,

c) $z = i^{25}$,

d) $z = \left(\frac{1}{1 - i}\right)^2$,

[$2 + 2 + 2 + 2 = 8$ P.]

2.4 Seien $x, x' \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) $(\mathrm{Re}(x\overline{x'}))^2 + (\mathrm{Im}(x\overline{x'}))^2 = |x|^2|x'|^2$.

(b) $\mathrm{Re}(x\overline{x'}) \leq |x||x'|$.

(c) $2\mathrm{Re}(x\overline{x'}) = x\overline{x'} + x'\overline{x}$.

(d) $|x + x'| \leq |x| + |x'|$.

Benutzen Sie gegebenenfalls 2.2. [$2 + 2 + 2 + 2 = 8$ P.]

2.5 Berechnen Sie

$$(a)\quad \frac{4+3i}{3+4i}, \qquad (b)\quad \mathrm{Re}\Big((2+2i)\Big(1-\frac{|3-3i|}{3}i\Big)\Big),$$

$$(c)\quad \mathrm{Im}\Big(\Big|\frac{71-96i}{928+\sqrt{6}i}\Big|\Big), \qquad (d)\quad \Big|\frac{5+5i}{1-3i}\Big|,$$

$$(e)\quad \mathrm{Im}((2i)^3 + i(5i^8)) \quad .$$

[2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 P.]

2.6 Für einen reellen Vektorraum $V \neq \{0\}$ und einen Vektor $v \in V$ seien die Abbildungen $T_v : V \to V$ und $M_v : V \to V$ durch $T_v(x) := v + x$ beziehungsweise $M_v(x) := v - x$ für alle $x \in V$ definiert.
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für alle $v, w \in V$ gilt $T_v \circ T_w = T_{v+w}$.
b) Für alle $v, w \in V$ gilt $M_v \circ M_w = M_{v-w}$.
c) Es gibt ein $v \in V$ mit $T_v = \mathrm{id}_V$.
d) Es gibt ein $v \in V$ mit $M_v = \mathrm{id}_V$.

[2 + 2 + 2 + 2 = 8 P.]

Achtung: Immatrikulationsnummer nicht vergessen!

Abgabetermin: 06. Dezember 2005