

3. Hausaufgaben

zur Vorlesung „Mathematik für InformatikerInnen I“

3.1 Untervektorräume des \mathbb{R}^n

a) Untersuchen Sie, welche der folgenden Teilmengen U_i des \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) Untervektorräume sind, und begründen Sie Ihre Antworten:

i) $U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \right\}$. **Nein, nicht korollar**

ii) $U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \right\}$ mit fest gewähltem $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. **könnte sein**

iii) $U_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n x_j^2 = -1 \right\}$. **irgendwas zum Quadrat ist positiv. Pos+Pos = Pos**

iv) $U_4 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \prod_{j=1}^n x_j = 0 \right\}$. **wahrscheinlich nicht. $x_1 * x_2 = 0$?**

v) $U_5 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid 3x_1 - 2x_2 = -x_n \right\}$. **höchstwahrscheinlich**

b) Bestimmen sie alle Elemente $a \in \mathbb{R}$, für die

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n x_j^2 = a \right\}$$

ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n ist.

[(2 + 2 + 2 + 2 + 2) + 4 = 14 P.]

3.2 Vereinigung von Untervektorräumen

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K , I sei eine nicht-leere Menge und für jedes $i \in I$ sei U_i ein Untervektorraum von V .

a) Zeigen Sie: Gilt zudem

(*) zu beliebigen $i_1, i_2 \in I$ gibt es ein $i_0 \in I$ mit $U_{i_1} \subset U_{i_0}$ und $U_{i_2} \subset U_{i_0}$,

so ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ ein Untervektorraum von V .

- b) Zeigen Sie an einem Beispiel, daß die Aussage a) i.allg. nicht ohne die Voraussetzung (*) gilt.
- c) Zeigen Sie an einem Beispiel, daß die Bedingung (*) nicht notwendig dafür ist, daß $\bigcup_{i \in I} U_i$ ein Untervektorraum von V ist.

[3 + 1 + 3 = 7 P.]

3.3 Lineare Gleichungssysteme

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem G von drei Gleichungen in drei Unbekannten über \mathbb{C} :

$$G \quad \begin{array}{rclcl} (3-i)x_1 & + & (-1+i)x_2 & + & (4-5i)x_3 & = & 2+17i \\ ix_1 & + & (-3+i)x_2 & + & (6-6i)x_3 & = & -20+i \\ (2+2i)x_1 & + & (1-i)x_2 & + & (1+6i)x_3 & = & -2+9i. \end{array}$$

- a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L(G)$ von G .
- b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L(G^0)$ der Homogenisierung G^0 von G .
- c) Untersuchen Sie, ob es Lösungen von G in \mathbb{R}^3 gibt.

[10 + 2 + 2 = 14 P.]

3.4 Lineare Gleichungssysteme mit Parametern

Es sei $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen sie alle Lösungen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ des folgenden linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von a :

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & ax_2 & = & 3 \\ ax_1 & + & x_2 & = & -3. \end{array} \quad [10 \text{ P.}]$$

3.5 Lineare Hülle

Sei K ein Körper und sei V ein K -Vektorraum. Zeigen Sie:

Für $x, y, z \in V$ mit $x + y + z = 0$ gilt

$$\text{Lin}(x, y) = \text{Lin}(y, z) = \text{Lin}(x, z).$$

[8 Punkte]

3.6 Linearkombination und lineare Hülle

- a) Stellen Sie in \mathbb{R}^3 den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dar.}$$

- b) Zeigen Sie, daß in \mathbb{R}^3 gilt:

$$\text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = x_3 \right\}. \quad [3 + 6 = 9 \text{ P.}]$$

3.7 Vereinigung, Durchschnitt und Differenz von Mengen

Seien A, B, C beliebige Mengen. Zeigen Sie

- a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
- c) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

[3 + 3 + 3 = 9 P.]

3.8 Durchschnitt und Summe von Untervektorräumen

Gegeben seien die Teilmengen

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad V := \left\{ \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$$

des \mathbb{R}^2 .

- a) Stellen Sie U und V graphisch in der Ebene dar.
- b) Sind U und V Untervektorräume des \mathbb{R}^2 ?
- c) Bestimmen Sie $U \cap V$.
- d) Bestimmen Sie $U + V$. Ist die Summe direkt?

Script nächste Seite

[1 + 2 + 2 + 4 = 9 P.]

Achtung: Immatrikulationsnummer nicht vergessen!

Abgabetermin: 05. Januar 2006