

4. Hausaufgaben

zur Vorlesung „Mathematik für InformatikerInnen I“

4.1 Kern und Bild einer linearen Abbildung

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ sei definiert durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

- a) Zeigen Sie, daß f linear ist.
- b) Bestimmen Sie eine Basis von Kern f .
- c) Bestimmen Sie rang f und eine Basis von Bild f .
- d) Ist f injektiv, surjektiv oder bijektiv?

[2 + 3 + 3 + 2 = 10 P.]

4.2 Eine Verallgemeinerung der Dimensionsformel

Es seien V, W Vektorräume über einem Körper K , $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung und U' ein Untervektorraum von W . Zeigen Sie:

- a) $U := f^{-1}(U')$ ist ein Untervektorraum von V .
- b) Hat V endliche Dimension, so haben auch U und $U' \cap \text{Bild } f$ endliche Dimension, und es gilt

$$\dim U = \dim(U' \cap \text{Bild } f) + \dim \text{Kern } f.$$

(Hinweis: Wenden Sie den Satz aus der Vorlesung auf $f|_U : U \rightarrow W$ an.) [2 + 6 = 8 P.]

4.3 Rang linearer Abbildungen

Es seien U, V, W, X Vektorräume endlicher Dimension über einem Körper K und $f : V \rightarrow W, g : U \rightarrow V, h : X \rightarrow U$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie:

- a) f ist genau dann surjektiv, wenn rang $f = \dim W$ gilt.
- b) f ist genau dann injektiv, wenn rang $f = \dim V$ gilt.
- c) Ist f injektiv und h surjektiv, so gilt rang $(f \circ g \circ h) = \text{rang } g$.
- d) Es gilt

$$\text{rang}(f \circ g) + \text{rang}(g \circ h) \leq \text{rang } g + \text{rang}(f \circ g \circ h).$$

[2 + 3 + 4 + 4 = 13 P.]

Bitte wenden!

4.4 Kern, Bild und Rang linearer Abbildungen

Es seien U, V, W Vektorräume endlicher Dimension über einem Körper K und $f : V \rightarrow W, g : U \rightarrow V$ lineare Abbildungen. Beweisen Sie:

a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $\text{rang}(f \circ g) = \text{rang } g$.
- (ii) $\text{Kern } f \cap \text{Bild } g = \{0\}$.

b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $\text{rang}(f \circ g) = \text{rang } f$.
- (ii) $f(g(U)) = f(V)$.
- (iii) $\text{Kern } f + \text{Bild } g = V$.

[3 + 6 = 9 P.]

4.5 Symmetrische und schiefssymmetrische Matrizen

Sei K ein Körper mit $2_K := 1_K + 1_K \neq 0$. Es sei $A \in \text{Mat}_n(K), n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) Für $A_+ := A + {}^tA$ und $A_- := A - {}^tA$ gilt ${}^tA_+ = A_+, {}^tA_- = -A_-$.

b) Es gibt Matrizen $A_1, A_2 \in \text{Mat}_n(K)$ mit

$$A = A_1 + A_2 \quad \text{und} \quad {}^tA_1 = A_1, {}^tA_2 = -A_2.$$

c) Die Matrizen A_1, A_2 aus b) sind eindeutig bestimmt, d.h. gilt auch

$$A = B_1 + B_2 \quad \text{und} \quad {}^tB_1 = B_1, {}^tB_2 = -B_2$$

mit $B_1, B_2 \in \text{Mat}_n(K)$, so gilt $B_1 = A_1$ und $B_2 = A_2$.

[2 + 3 + 3 = 8 P.]

4.6 Vektorräume von Matrizen

Sei K ein Körper mit $2_K := 1_K + 1_K \neq 0$, und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die folgenden Teilmengen von $\text{Mat}_n(K)$ Untervektorräume von $\text{Mat}_n(K)$ sind, und bestimmen Sie deren Dimension:

- a) $D_n := \{(a_{ij}) \in \text{Mat}_n(K) \mid a_{ij} = 0 \text{ für alle } 1 \leq i < j \leq n\}$,
- b) $S_n := \{A \in \text{Mat}_n(K) \mid {}^tA = A\}$,
- c) $A_n := \{A \in \text{Mat}_n(K) \mid {}^tA = -A\}$.

[4 + 4 + 4 = 12 P.]

Achtung: Immatrikulationsnummer nicht vergessen!

Abgabetermin: 31. Januar 2006