5. Hausaufgaben

zur Vorlesung „Mathematik für Informatiker/innen II“

5.1 Untersuchen Sie, ob folgende Matrizen invertierbar sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 8 & -4 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

[$4 + 6 = 10$ P.]

5.2 Gegeben sei das lineare Gleichungssystem G in Matrixform $Ax = w$ mit $w \in \mathbb{R}^4$ und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4,3}(\mathbb{R}).$$

a) Ist G universell (d.h. für alle $w \in \mathbb{R}^4$) lösbar?

b) Ist G lösbar für $w := \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder $w := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?
Bestimmen Sie gegebenenfalls alle Lösungen.

c) Ist G eindeutig lösbar für $w := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Begründen Sie Ihre Antworten. [$2 + 6 + 4 = 12$ P.]

5.3 a) Sei $A := \begin{pmatrix} i & i & i & 0 \\ i & 0 & i & i \\ i & i & 0 & i \\ 0 & i & i & i \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{C})$. Berechnen Sie $\det A$ und $\det A^2$.
Gilt $A \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$? Wenn ja, berechnen Sie auch $\det A^{-1}$.

b) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & -a & -b \\ -b & a & b & -a \\ c & d & c & d \\ -d & c & -d & c \end{pmatrix} = 4(a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

[$5 + 3 = 8$ P.]

5.4 a) Zeigen Sie, daß das Gleichungssystem

$$G \qquad \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & w_1 \\ 3x_1 & & & + & x_3 & - & 2x_4 & = & w_2 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & w_3 \\ -3x_1 & & & - & x_3 & + & 3x_4 & = & w_4 \end{array}$$

für alle $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar ist.

b) Berechnen Sie die Lösung von G für $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Cramerschen Regel.

[$4 + 8 = 12$ P.]

5.5 Berechnen Sie die Determinante folgender Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} -i & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2i \\ 3 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{C})$,

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \frac{5}{4} \\ -3 & 6 & 0 & -\frac{3}{4} \\ -2 & -1 & 14 & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$,

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 11 & 12 & 6 & 7 & 10 \\ 4 & 9 & 0 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 0 & 64 & 125 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{R})$.

[$3 + 3 + 3 = 9$ P.]

5.6 Für jede reelle Zahl t sei die Matrix $A_t \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ definiert durch

$$A_t := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\det A_t$.

b) Berechnen Sie die Komplementärmatrix $\mathrm{adj}(A_t)$ und zeigen Sie, daß $A_t \cdot \mathrm{adj}(A_t) = (\det(A_t)\mathbf{1}_3 = \mathrm{adj}(A_t) \cdot A_t$ gilt.

c) Bestimmen Sie die Zahlen $t \in \mathbb{R}$, für die A_t invertierbar ist, und geben Sie für diese Werte von t die inverse Matrix A_t^{-1} von A_t an.

[$3 + 3 + 3 = 9$ P.]

Achtung: Immatrikulationsnummer nicht vergessen!

Abgabetermin: 23. Mai 2006