

6. Hausaufgaben

zur Vorlesung "Mathematik für Informatiker/innen II"

6.1 Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ zwei vorgegebene positive reelle Zahlen. Es bezeichne

$$\begin{aligned}
 m_{\text{geom}} &:= \sqrt{ab} && \text{das } \textit{geometrische Mittel}, \\
 m_{\text{arith}} &:= \frac{1}{2}(a + b) && \text{das } \textit{arithmetische Mittel}, \\
 m_{\text{harm}} &:= \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} && \text{das } \textit{harmonische Mittel} \text{ und} \\
 m_{\text{quadr}} &:= \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} && \text{das } \textit{quadratische Mittel}.
 \end{aligned}$$

Nach Satz aus der Vorlesung gilt dann die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel

$$m_{\text{geom}} \leq m_{\text{arith}}.$$

Weisen Sie nach, daß folgende Ungleichungen gelten:

- a) $m_{\text{harm}} \leq m_{\text{geom}},$
- b) $m_{\text{arith}} \leq m_{\text{quadr}}.$

[5 + 5 = 10 P.]

6.2 Betrachten Sie die nachfolgend angegebenen Mengen M_1 und M_2 von reellen Zahlen ($M_1 \subset \mathbb{R}$ und $M_2 \subset \mathbb{R}$); entscheiden Sie jeweils für die angegebenen reellen Zahlen r , ob r eine untere Schranke, eine obere Schranke, Infimum oder Supremum der betreffenden Menge ist. Tragen Sie dementsprechend "ja" oder "nein" in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$$(1) \quad M_1 := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad (2) \quad M_2 := [0, \frac{1}{2}] \cup (\frac{3}{4}, 1)$$

| | $r \leq M_1$ | $M_1 \leq r$ | $r = \inf M_1$ | $r = \sup M_1$ | $r \leq M_2$ | $M_2 \leq r$ | $r = \inf M_2$ | $r = \sup M_2$ |
|-------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $r = -1$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $r = 0$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $r = \frac{1}{2}$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $r = 1$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $r = 2$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

(Zur Bewertung: Jede richtige Eintragung zählt 0,25 Punkte, jede falsche Eintragung führt zu einem Abzug von 0,25 Punkten, Kästchen ohne Eintragung gehen nicht in die Wertung ein. Ist die so berechnete Gesamtpunktzahl negativ, so führt dies zu einem Ergebnis von 0 Punkten für diese Aufgabe.) [10 P.]

- 6.3 a) Beweisen Sie folgende Ergänzung zur Bernoullischen Ungleichung:
Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 \leq x \leq 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n \leq 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2}.$$

- b) Sei $M := \{(1 - \frac{1}{2^n})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie (mit Hilfe von a)): $\sup M \leq \frac{5}{8}$.
c) Zeigen Sie, daß für die Menge M aus b) $\inf M = \frac{1}{2}$ gilt.

[5 + 2 + 3 = 10 P.]

- 6.4 Betrachten Sie die folgenden Mengen M reeller Zahlen und entscheiden Sie jeweils, ob sie offen sind und ob sie abgeschlossen sind. Tragen Sie dementsprechend "ja" oder "nein" in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

| | M ist offen | M ist abgeschlossen |
|---------------------------------------|---------------|-----------------------|
| (1) $M = [1, 2) \cup [2, 3)$ | | |
| (2) $M = [1, 2] \cup [2, 3]$ | | |
| (3) $M = [1, 3) \cup [2, 4]$ | | |
| (4) $M = (1, 3) \cup (2, 4)$ | | |
| (5) $M = \{1, 2\} \cup \{2, 3\}$ | | |
| (6) $M = \{1, 3\} \cup \{2, 4\}$ | | |
| (7) $M = \mathbb{N} \cup \{0\}$ | | |
| (8) $M = \mathbb{Z}$ | | |
| (9) $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | | |
| (10) $M = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ | | |

(Zur Bewertung: Jede richtige Eintragung zählt 0,5 Punkte, jede falsche Eintragung führt zu einem Abzug von 0,5 Punkten, Kästchen ohne Eintragung gehen nicht in die Wertung ein. Ist die so berechnete Gesamtpunktzahl negativ, so führt dies zu einem Ergebnis von 0 Punkten für diese Aufgabe.) [10 P.]

- 6.5 Geben Sie jeweils (mit Begründung) die Menge der $x \in \mathbb{R}$ mit

- a) $|x+1| < |x-2|$,
b) $|4x+3| + |2x-5| \geq 8$

als Vereinigung von möglichst wenig Intervallen an.

[4 + 6 = 10 P.]

Achtung: Immatrikulationsnummer nicht vergessen!

Abgabetermin: 13. Juni 2006