

7. Hausaufgaben

zur Vorlesung „Mathematik für Informatiker/innen II“

7.1 Stetigkeit von Funktionen

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, in denen die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind:

(a) $f(x) := [x^2];$

(b) $f(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

[4 + 4 = 8 Punkte]

7.2 Eigenschaften von Funktionen

Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f : [-2, -1[\cup [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \begin{cases} x + 1 & \text{für } x \in [-2, -1[\\ x - 1 & \text{für } x \in [1, 2] \end{cases}$$

streng monoton wachsend, injektiv und stetig ist, daß aber die Umkehrfunktion $f^{-1} : f([-2, -1[\cup [1, 2]) \rightarrow \mathbb{R}$ nicht stetig ist. Warum steht dies nicht im Widerspruch zu Satz 3.3? [6 Punkte]

7.3 Gleichmäßige Stetigkeit

- (a) Seien $\emptyset \neq D, E \subset \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetige Funktionen mit $f(D) \subset E$. Zeigen Sie, daß auch $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.
- (b) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv und gleichmäßig stetig, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

(Hinweis: s. Definition 3.7.)

[4 + 6 = 10 Punkte]

7.4 Eigenschaften von Funktionen

Sei $n \in \mathbb{N}$. Es seien a_1, \dots, a_n reelle Zahlen mit $a_n < 0$.

Zeigen Sie: Die durch

$$p(x) := x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

definierte Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt mindestens eine (positive) reelle Nullstelle.

(Hinweis: Man verwende Satz 3.1.)

[8 Punkte]

7.5 Funktionen mit überall strikt positiven Werten

Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit

$$f(x) > 0 \quad \text{für jedes } x \in D.$$

- (a) Zeigen Sie: Ist D kompakt, so existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ mit

$$f(x) \geq \alpha \quad \text{für jedes } x \in D.$$

- (b) Zeigen Sie anhand jeweils eines Beispiels: Ist D abgeschlossen oder offen, so existiert nicht notwendig ein $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ mit

$$f(x) \geq \alpha \quad \text{für jedes } x \in D.$$

[6 + 4 = 10 Punkte]

7.6 Grenzwerte von Funktionen

Entscheiden Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und bestimmen sie diese gegebenenfalls:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x + 2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x - 2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{(x - 2)^2}$

(d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ |x| < 1}} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$

[2 + 2 + 2 + 2 = 8 Punkte]

Achtung: Immatrikulationsnummer nicht vergessen!

Abgabetermin: 11. Juli 2006