8. Hausaufgaben

zur Vorlesung "Mathematik für Informatiker/innen III"

8.1 Das Riemann-Integral Sei $f : [-1,1] \to I\!R$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{für } \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(i) $f \in R([-1,1])$;

(ii) f besitzt keine Stammfunktion.

[$2 + 6 = 8$ P.]

8.2 Das Riemann-Integral

(a) Sei $f : [a,b] \to I\!R$ mit $a < b$ stetig. Zeigen Sie:

(i) Gilt $0 \leq f(x)$ für alle $x \in [a,b]$ und $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, dann folgt $f = 0$.

(ii) Gilt $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, so folgt $f(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a,b)$.

(b) Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in I\!R$ $(n \in I\!N)$ mit $a_{i0} \neq 0$ für ein $1 \leq i_0 \leq n$. Zeigen Sie: Es existiert ein $x_0 \in (0,\pi)$ mit $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos(kx_0) = 0$.

[$4 + 4 + 2 = 10$ P.]

8.3 Integration von periodischen Funktionen
Sei $f : I\!R \to I\!R$ stetig und 2π-periodisch, d.h. $f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle $x \in I\!R$. Zeigen Sie:

(i) $\int\limits_0^{2\pi} f(x+z)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$ für alle $z \in I\!R$;

(ii) f besitzt genau dann eine 2π-periodische Stammfunktion, wenn gilt:

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

[$8 + 4 = 12$ P.]

8.4 Substitutionsregel Sei $g : [a,b] \to [c,d]$ eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie:

$$\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{g(a)}^{g(b)} g^{-1}(t)\mathrm{d}t = bg(b) - ag(a).$$

[8 P.]

8.5 Partielle Integration

Für $n \in \mathbb{N}^0$ sei $C_n := \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x$.

(i) Berechnen Sie C_0 und C_1;

(ii) Geben Sie für C_n, $n \in \mathbb{N}^0$, eine Rekursionsformel an;

(iii) Geben Sie für C_n, $n \in \mathbb{N}^0$, eine geschlossene Darstellung an.

[$2 + 3 + 3 = 8$ P.]

8.6 Partielle Integration

Lösen Sie die folgenden Integrale mittels partieller Integration:

(i) $\int\limits_0^{\pi} x^3 \sin(2x)\mathrm{d}x$;

(ii) $\int\limits_0^{\pi} \sin(x)\sinh(x)\mathrm{d}x$;

(iii) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \sin(bx)\mathrm{d}x$ für beliebige, aber feste $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

[$4 + 4 + 5 = 13$ P.]

8.7 Substitutionsregel

Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels geeigneter Substitutionen:

(i) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}\mathrm{d}x$;

(ii) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)e^{\sin(x)}\mathrm{d}x$;

(iii) $\int\limits_0^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}}\mathrm{d}x$.

[$3 + 5 + 5 = 13$ P.]

Abgabe am 28. November 2006

Immatrikulationsnummer nicht vergessen!!