



Übungsaufgaben zur Vorlesung  
 Theoretische Informatik I  
 WS 2005/2006

Übungsblatt 10  
 12.01.2006, Abgabe 19.01.2006, 9:15 Uhr

**1. Aufgabe** (3 Punkte):

Sei  $\leq$  eine lineare Ordnung auf einer Menge  $A$ .  $\leq$  ist *dicht*, wenn zu je zwei verschiedenen Elementen  $a, b \in A$  mit  $a \leq b$  ein Element  $c \in A \setminus \{a, b\}$  existiert, so daß  $a \leq c \leq b$ .

Geben Sie ein Axiomensystem  $\Phi_{DO}$  für die Klasse aller dichten linearen Ordnungen an, d.h. eine Satzmenge  $\Phi_{DO} \subseteq L_{\sigma_{Ord}}$ , so daß für alle  $\sigma_{Ord}$ -Strukturen  $\mathcal{A} = (A, \dot{\leq}^{\mathcal{A}})$  gilt:

$$\mathcal{A} \models \Phi_{DO} \iff \dot{\leq}^{\mathcal{A}} \text{ dichte lineare Ordnung auf } A.$$

**2. Aufgabe** (4 Punkte):

Die Menge  $\{\dot{f}, \dot{R}, \dot{c}\}$  sei die Signatur  $\sigma^*$ . Wir betrachten die  $\sigma^*$ -Struktur  $\mathcal{A} := (A, \dot{f}^{\mathcal{A}}, \dot{R}^{\mathcal{A}}, \dot{c}^{\mathcal{A}})$  mit  $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $\dot{c}^{\mathcal{A}} = 3$ ,  $\dot{R}^{\mathcal{A}} = \{(0, 2, 4), (1, 3, 0), (4, 2, 3)\}$  und die Funktion  $\dot{f}^{\mathcal{A}}: A \times A \rightarrow A$  definiert wie folgt durch die Tabelle:

$\dot{f}^{\mathcal{A}}$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

d.h. zum Beispiel,  $\dot{f}^{\mathcal{A}}(2, 3) = 0$ ,  $\dot{f}^{\mathcal{A}}(1, 3) = 4$  etc. Die Interpretation  $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$  sei gegeben durch  $\beta: Var \rightarrow A$  mit  $\beta(v_0) = 2, \beta(v_1) = 0, \beta(v_2) = 1, \beta(v_3) = 4$  und  $\beta(v_i) = 3$  für alle  $i \geq 4$ .

(a) Berechnen Sie  $\llbracket t_i \rrbracket^{\mathcal{I}}$  für  $i = 1, 2$  mit

- (a)  $t_1 := \dot{f}(\dot{f}(v_2, v_5), \dot{c})$
- (b)  $t_2 := \dot{f}(\dot{f}(\dot{c}, \dot{f}(v_3, \dot{c})), v_1)$

(b) Berechnen Sie  $\llbracket \varphi_i \rrbracket^{\mathcal{I}}$  für  $i = 1, 2$  mit

- (a)  $\varphi_1 := \exists v_2 \dot{R}(v_0, v_2, v_3) \vee \dot{R}(v_0, v_2, \dot{f}(v_0, v_2))$
- (b)  $\varphi_2 := \forall v_1 (\dot{f}(v_1, \dot{c}) = \dot{f}(\dot{c}, \dot{c}) \rightarrow \exists v_3 (\dot{R}(v_1, v_2, v_3) \vee \dot{f}(v_1, v_5) = \dot{c}))$

**3. Aufgabe** (6 Punkte):

Sei  $\sigma$  eine Symbolmenge und  $L_{\sigma}$  die zu  $\sigma$  gehörende Sprache erster Stufe.

(a) Sind die Formeln

(i)  $\psi_1 := \forall x \exists y \varphi \rightarrow \exists y \forall x \varphi$

(ii)  $\psi_2 := \exists y \forall x \varphi \rightarrow \forall x \exists y \varphi$

für beliebige Formeln  $\varphi$  aus  $L_\sigma$  mit  $\text{frei}(\varphi) = \{x, y\}$  allgemeingültig? Ohne Beweis.

(b) Zeigen Sie, dass für alle Formeln  $\varphi(x, y)$  und  $\xi(x, y)$  aus  $L_\sigma$  mit  $\text{frei}(\varphi) = \text{frei}(\xi) = \{x, y\}$  folgende Formel allgemeingültig ist:

$$(\forall x \forall y \varphi(x, y) \rightarrow \exists x \exists y \xi(x, y)) \leftrightarrow \exists x \exists y (\varphi(x, y) \rightarrow \xi(x, y)).$$

(c) Seien  $\varphi(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$  und  $\xi(x, y)$  drei quantorenfreie Formeln aus  $L_\sigma$  mit  $x$  und  $y$  als freien Variablen. Sei  $\rho$  wie folgt definiert:

$$\rho := \forall x \forall y (\varphi(x, y) \rightarrow \varphi(y, x)) \rightarrow (\forall u \forall v (\varphi(u, v) \rightarrow \psi(u, v)) \rightarrow \exists x \exists y (\varphi(x, y) \rightarrow \xi(x, y))).$$

Zeigen Sie, dass es eine quantorenfreie Formel  $\chi$  in  $L_\sigma$  gibt mit  $\rho \equiv \exists x \exists y \chi$ .

#### 4. Aufgabe (7 Punkte):

Sei  $\sigma_{\text{Graph}} := \{\dot{E}\}$ , wobei  $\dot{E}$  ein 2-stelliges Relationssymbol ist. Wir betrachten Graphen als  $\sigma_{\text{Graph}}$ -Strukturen. Ein Graph  $\mathcal{H} = (H, \dot{E}^{\mathcal{H}})$  ist ein *induzierter Subgraph* eines Graphen  $\mathcal{G} = (G, \dot{E}^{\mathcal{G}})$ , wenn  $H \subseteq G$  und  $\dot{E}^{\mathcal{H}} = \dot{E}^{\mathcal{G}} \cap H^2$ .  $L_\sigma(\{\forall, \wedge, \vee\})$  bezeichnet die Menge aller  $\sigma$ -Formeln, in denen nur Allquantoren und die Junktoren  $\wedge, \vee$  vorkommen (und weder Existenzquantoren noch die Junktoren  $\neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ ).

Beweisen Sie, daß für alle  $\sigma$ -Sätze  $\phi \in L_\sigma(\{\forall, \wedge, \vee\})$  und alle Graphen  $\mathcal{G}$  gilt:

Falls  $\mathcal{G} \models \phi$ , so auch  $\mathcal{H} \models \phi$  für alle induzierten Subgraphen  $\mathcal{H}$  von  $\mathcal{G}$ .

*Hinweis:* Zeigen Sie per Induktion über den Aufbau von  $\phi \in L_\sigma(\{\forall, \wedge, \vee\})$ , daß für alle Belegungen  $\beta : \text{Var} \rightarrow H$  gilt:

$$\text{Wenn } (\mathcal{G}, \beta) \models \phi, \text{ dann } (\mathcal{H}, \beta) \models \phi.$$