Humboldt–Universität zu Berlin
Institut für Informatik

Logik in der Informatik
Prof. M. Grohe

Übungsaufgaben zur Vorlesung Theoretische Informatik I WS 2005/2006

Übungsblatt 11
19.01.2006, Abgabe 26.01.2006, 9:15 Uhr

1. Aufgabe (4 Punkte):

Sei $\sigma = \{\underset{3}{\dot{R}}, \underset{1}{\dot{f}_1}, \underset{2}{\dot{f}_2}, \dot{c}_1, \dot{c}_2\}$ und φ_1 und φ_2 Formeln aus L_σ wie folgt definiert:

(i) $\varphi_1 := \forall v_1(\exists v_0(\dot{R}(v_0, v_1, \dot{c}_1) \vee \dot{R}(v_0, v_2, \dot{c}_2)) \rightarrow \dot{f}_1(\dot{c}_2) \doteq \dot{f}_2(v_1, v_0))$.

(ii) $\varphi_2 := \forall v_0 \exists v_2 \neg \dot{R}(\dot{c}_2, v_0, v_2) \wedge \exists v_1 \forall v_2 \dot{f}_2(v_2, \dot{c}_1) \doteq \dot{f}_1(v_1)$.

Sei $S := \left(\frac{\dot{f}_1(\dot{c}_1)}{v_0}, \frac{\dot{f}_2(v_0, \dot{c}_2)}{v_2}\right)$. Geben Sie $\varphi_1 S$ und $\varphi_2 S$ an!

2. Aufgabe (4 Punkte):

Geben Sie Formeln ψ_1 und ψ_2 in pränexer Normalform an, die zu den Formeln φ_1 und φ_2 äquivalent sind, wobei $\varphi_1, \varphi_2 \in L_\sigma$ mit $\sigma = \{\underset{3}{\dot{R}_1}, \underset{2}{\dot{R}_2}, \underset{2}{\dot{R}_3}, \underset{1}{\dot{f}_1}, \underset{2}{\dot{f}_2}\}$ wie folgt definiert sind:

(a) $\varphi_1 := \exists x(\forall y \dot{R}_1(x, y, z) \rightarrow \exists y \dot{f}_1(x) \doteq \dot{f}_2(y, z))$.

(b) $\varphi_2 := \forall x(\forall y(\dot{R}_2(y, z) \vee \neg \dot{R}_3(x, y)) \rightarrow \neg \forall z\, \dot{R}_1(x, y, z))$.

3. Aufgabe (6 Punkte):

Sei $\sigma = \{\underset{1}{\dot{f}}, \underset{1}{\dot{g}}\}$.

(a) Definieren Sie drei Sätze φ, ψ, θ, so daß in jeder σ-Struktur $\mathcal{M} := (M, \dot{f}^{\mathcal{M}}, \dot{g}^{\mathcal{M}})$ gilt:

(i) $\mathcal{M} \models \varphi$ genau dann, wenn $\dot{f}^{\mathcal{M}} \doteq \dot{g}^{\mathcal{M}}$ und $\dot{f}^{\mathcal{M}}$ eine konstante Abbildung ist.

(ii) $\mathcal{M} \models \psi$ genau dann, wenn $\mathrm{bild}(\dot{f}^{\mathcal{M}}) \subseteq \mathrm{bild}(\dot{g}^{\mathcal{M}})$

(iii) $\mathcal{M} \models \theta$ genau dann, wenn $|\mathrm{bild}(\dot{f}^{\mathcal{M}}) \cap \mathrm{bild}(\dot{g}^{\mathcal{M}})| = 1$

(b) Seien

$\varphi_1 := \forall x \dot{f}(x) \doteq \dot{g}(x)$, $\varphi_2 := \forall x \forall y \dot{f}(x) \doteq \dot{g}(y)$, $\varphi_3 := \forall x \exists y \dot{f}(x) \doteq \dot{g}(y)$,
$\varphi_4 := \exists x \forall y \dot{f}(x) \doteq \dot{g}(y)$, $\varphi_5 := \exists x \exists y \dot{f}(x) \doteq \dot{g}(y)$.

Geben Sie Modelle für folgende Formeln an: $\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$, φ_2, $\neg\varphi_1 \wedge \varphi_3$, $\neg\varphi_1 \wedge \varphi_4$, $\neg\varphi_3 \wedge \neg\varphi_4 \wedge \varphi_5$, $\neg\varphi_5$.

4. Aufgabe (6 Punkte):

Für eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ sei

$$L_\sigma(\mathcal{A}) := \{\varphi(\mathcal{A}) \mid n \geq 1,\ \varphi(x_1, ..., x_n) \in L_\sigma\}.$$

$L_\sigma(\mathcal{A})$ ist also eine Menge von Relationen über A. Zeigen Sie:

(a) Für alle n-stelligen Relationen $R_1, R_2 \in L_\sigma(\mathcal{A})$ ist auch die Relation $R_1 \cup R_2$ in $L_\sigma(\mathcal{A})$.

(b) Für alle n-stelligen Relationen $R_1 \in L_\sigma(\mathcal{A})$ und alle m-stelligen Relationen $R_2 \in L_\sigma(\mathcal{A})$ ist auch die Relation $R_1 \times R_2$ in $L_\sigma(\mathcal{A})$.

(c) Für alle n-stelligen Relationen $R \in L_\sigma(\mathcal{A})$ ist auch die Relation $A^n \setminus R$ in $L_\sigma(\mathcal{A})$.

(d) Für alle $n \geq 2,\ 1 \leq k \leq n$ und n-stelligen Relationen $R \in L_\sigma(\mathcal{A})$ ist auch die $(n-1)$-stellige Relation

$$\pi_k(R) = \{(a_1, ..., a_{k-1}, a_{k+1}, ..., a_n) \mid \text{ex.} a_k \in A,\ (a_1, ..., a_n) \in R\}$$

in $L_\sigma(\mathcal{A})$.

(e) Für alle n-stelligen Relationen $R \in L_\sigma(\mathcal{A})$ und jede bijektive Abbildung $S : \{1, ..., n\} \longrightarrow \{1, ..., n\}$ ist auch die Relation

$$\varrho_S(R) = \{(a_{S(1)}, ..., a_{S(n)}) \mid (a_1, ..., a_n) \in R\}$$

in $L_\sigma(\mathcal{A})$.

(f) Für alle n-stelligen Relationen $R \in L_\sigma(\mathcal{A})$ und alle i, j mit $1 \leq i, j \leq n$ ist auch die Relation

$$\sigma_{i=j}(R) = \{(a_1, ..., a_n) \in R \mid a_i = a_j\}$$

in $L_\sigma(\mathcal{A})$.