



## Übungsaufgaben zur Vorlesung Theoretische Informatik I WS 2005/2006

Übungsblatt 12  
26.01.2006, Abgabe 02.02.2006, 9:15 Uhr

### 1. Aufgabe (5 Punkte):

Die  $\sigma_{AR}$ -Struktur  $\mathcal{A}$  sei definiert durch:

- $A := \{0, \dots, 7\}$ ,
- für alle  $a, b, c \in A$ :  $a \dot{\times}^{\mathcal{A}} b \doteq c \Leftrightarrow a \cdot b \equiv c \pmod{8}$ ,
- für alle  $a, b, c \in A$ :  $a \dot{+}^{\mathcal{A}} b \doteq c \Leftrightarrow a + b \equiv c \pmod{8}$ ,
- $\dot{0}^{\mathcal{A}} := 0$ ,
- $\dot{1}^{\mathcal{A}} := 1$ .

Geben Sie  $\varphi_i(\mathcal{A})$  für  $i = 1, 2, 3$  an, wobei

- (a)  $\varphi_1(x) := \exists y x \dot{\times} y \doteq \dot{0}$ ,
- (b)  $\varphi_2(x, y) := \exists z x \dot{+} z \doteq y$ ,
- (c)  $\varphi_3(x, y) := \exists z (x \dot{+} y \doteq z \wedge \forall y y \dot{+} z \doteq y)$ .

### 2. Aufgabe (5 Punkte):

In jedem der folgenden 5 Fälle sind jeweils eine Symbolmenge  $\sigma_i$  und zwei  $\sigma_i$ -Strukturen  $\mathcal{A}_i$  und  $\mathcal{B}_i$  definiert,  $i = 1, \dots, 5$ . Geben Sie in jedem Fall einen Satz  $\varphi_i \in L_{\sigma_i}$  an, so daß  $\varphi_i$  in  $\mathcal{A}_i$  erfüllt ist und  $\varphi_i$  in  $\mathcal{B}_i$  nicht erfüllt ist:

- (1)  $\sigma_1 := \{\dot{R}_2\}$        $\mathcal{A}_1 := (\mathbb{N}, \leq)$        $\mathcal{B}_1 := (\mathbb{Z}, \leq)$
- (2)  $\sigma_2 := \{\dot{R}_2\}$        $\mathcal{A}_2 := (\mathbb{Q}, \leq)$        $\mathcal{B}_2 := (\mathbb{Z}, \leq)$
- (3)  $\sigma_3 := \{\dot{f}_2\}$        $\mathcal{A}_3 := (\mathbb{N}, \times)$        $\mathcal{B}_3 := (\emptyset(\mathbb{N}), \cap)$
- (4)  $\sigma_4 := \{\dot{f}_2, \dot{c}\}$        $\mathcal{A}_4 := (\mathbb{N}, \times, 1)$        $\mathcal{B}_4 := (\mathbb{Z}, \times, 1)$
- (5)  $\sigma_5 := \{\dot{f}_1, \dot{f}_2, \dot{c}, \dot{d}\}$        $\mathcal{A}_5 := (\mathbb{R}, +, \times, 0, 1)$        $\mathcal{B}_5 := (\mathbb{Q}, +, \times, 0, 1)$ .

Dabei bedeuten  $+$  bzw.  $\times$  die übliche Addition bzw. Multiplikation.

### 3. Aufgabe (4 Punkte):

Beweisen Sie, daß folgende Regeln in  $\sigma$ -BS ableitbar sind:

- (a) Für alle  $\varphi \in L_\sigma$ ,  $x, y \in Var$

$$\frac{\forall x \forall y \varphi}{\forall y \forall x \varphi}.$$

- (b) Für alle  $\varphi, \psi \in L_\sigma$ ,  $x \in Var$

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi}.$$

### 4. Aufgabe (6 Punkte):

Sei  $\sigma = \{\dot{R}_1, \dots, \dot{R}_m\}$ , wobei  $\dot{R}_1, \dots, \dot{R}_m$  Relationssymbole sind. Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Struktur. Wir definieren eine Menge  $M(\mathcal{A})$  von Relationen über  $\mathcal{A}$  rekursiv wie folgt:

*Basisregeln:*

- (B1)  $A \in M(\mathcal{A})$   
(B2)  $\dot{R}_i^A \in M(\mathcal{A})$  für  $1 \leq i \leq m$ .

*Rekursive Regeln:*

- (R1) Für alle  $n \geq 1$  und  $n$ -stelligen Relationen  $R, R' \in M(\mathcal{A})$  ist auch  $R \cup R' \in M(\mathcal{A})$ .  
(R2) Für alle  $n \geq 1$ ,  $m \geq 1$  und  $n$ -stelligen Relationen  $R \in M(\mathcal{A})$  und  $m$ -stelligen Relationen  $R' \in M(\mathcal{A})$  ist auch die Relation  $R \times R'$  in  $M(\mathcal{A})$ .  
(R3) Für alle  $n \geq 1$  und  $n$ -stelligen Relationen  $R \in M(\mathcal{A})$  ist auch die Relation  $A^n \setminus R$  in  $M(\mathcal{A})$ .  
(R4) Für alle  $n \geq 2$ ,  $1 \leq k \leq n$  und  $n$ -stelligen Relationen  $R \in M(\mathcal{A})$  ist auch die  $(n-1)$ -stellige Relation  $\pi_k(R)$  (def. wie in der Aufgabe 4.(d), Übungsblatt 11) in  $M(\mathcal{A})$ .  
(R5) Für alle  $n \geq 1$  und  $n$ -stelligen Relationen  $R \in M(\mathcal{A})$  und jede bijektive Abbildung  $S : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  ist auch die Relation  $\varrho_S(R)$  (def. wie in der Aufgabe 4.(e), Übungsblatt 11) in  $M(\mathcal{A})$ .  
(R6) Für alle  $n \geq 1$  und  $n$ -stelligen Relationen  $R \in M(\mathcal{A})$  und alle  $i, j$  mit  $1 \leq i, j \leq n$  ist auch die Relation  $\sigma_{i=j}(R)$  (def. wie in der Aufgabe 4.(f), Übungsblatt 11) in  $M(\mathcal{A})$ .

Zeigen Sie, daß  $M(\mathcal{A}) = L_\sigma(\mathcal{A})$ , wobei  $L_\sigma(\mathcal{A})$  wie in Aufgabe 4., Übungsblatt 11 definiert ist.