Humboldt–Universität zu Berlin
Institut für Informatik

Logik in der Informatik
Prof. M. Grohe

Übungsaufgaben zur Vorlesung Theoretische Informatik I WS 2005/2006

Übungsblatt 3
03.11.2005, Abgabe 10.11.2005, 9:15 Uhr

1. Aufgabe (4 Punkte):

Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$ gilt:

(a)
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

(b)
$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \qquad \text{für } a \neq 1, a \in \mathbb{R}$$

2. Aufgabe (5 Punkte):

Sei $A = \{a, b\}$. Die Menge A^* kann wie folgt rekursiv definiert werden:
Basisregel: $\epsilon \in A^*$
Rekursive Regeln: Wenn $w \in A^*$, dann $wa \in A^*$ und $wb \in A^*$.
Seien nun die Funktionen $f, g : A^* \to \mathbb{Z}$ wie folgt rekursiv definiert:

$f(\varepsilon) := 3$	$g(\varepsilon) := 3$
$f(wa) := 5 - f(w)$	$g(wa) := 7 \cdot g(w) + 5$
$f(wb) := (-1) \cdot f(w)$	$g(wb) := 7 \cdot g(w)$

Beweisen Sie, daß für jedes $w \in A^*$ gilt: Die Zahl 8 teilt $f(w) - g(w)$.

3. Aufgabe (5 Punkte):

Sei $A = \{0, 1\}$ und sei $L \subseteq A^*$ wie folgt definiert:

Basisregeln: $0, 1 \in L$.
Rekursive Regeln: (R1) Wenn $w \in L$, so auch $0w1 \in L$.
(R2) Für alle $a, b \in A$ gilt, daß wenn $wab \in L$, so auch $w \in L$.

(a) Geben Sie vier verschiedene Wörter der Länge 5 in L an.

(b) Zeigen Sie, daß das Wort $0001111 \in L$ ist.

(c) Zeigen Sie, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt: $0^n 1^n \notin L$.

4. **Aufgabe** (6 Punkte):

Seien $M_1, ..., M_n$ Mengen. Sei weiterhin die Menge N wie folgt rekursiv definiert:

Basisregeln: $\emptyset \in N$ und
$M_i \in N$ für $1 \leq i \leq n$.
Rekursive Regeln: Wenn $M, M' \in N$, so auch $(M \cup M') \in N$.

(a) Geben Sie je ein Beispiel für Mengen $M_1, ..., M_n$ an, so daß

(i) $\mid N \mid = 1$

(ii) $\mid N \mid = 2^n$

(b) Zeigen Sie, daß $\mid N \mid \leq 2^n$.