



Übungsaufgaben zur Vorlesung  
Theoretische Informatik I  
WS 2005/2006

Übungsblatt 5  
17.11.2005, Abgabe 24.11.2005, 9:15 Uhr

**1. Aufgabe** (5 Punkte):

Seien die Formeln  $\varphi, \psi, \psi^*$  aus AL wie folgt definiert:

$$\varphi := ((X \wedge \neg Y) \leftrightarrow Z) \rightarrow (((X \wedge \neg Y) \vee Z) \leftrightarrow Y), \quad \psi := (X \wedge \neg Y), \quad \psi^* := Y \rightarrow Z.$$

Berechnen Sie

- $\varphi S$ , wobei  $S : \{X, Y\} \rightarrow \text{AL}$  die durch  $S(X) := \psi$  und  $S(Y) := \psi^*$  definierte Substitution ist (s. Def. 3.39 aus der Vorlesung),
- $\text{ers}_{\psi \rightsquigarrow \psi^*}(\varphi)$  (vgl. S. 163-a der Vorlesung).

**2. Aufgabe** (6 Punkte):

Zeigen Sie die Äquivalenz von  $\varphi_i$  und  $\psi_i$  für  $i = 1, 2, 3, 4$  mit Hilfe von algebraischen Umformungen, wobei

$$\begin{array}{ll} \varphi_1 = X \rightarrow \neg(Y \vee Z) & \psi_1 = (Z \rightarrow (X \rightarrow Y)) \wedge (Y \rightarrow \neg X) \\ \varphi_2 = \varphi_1 & \psi_2 = (Z \vee Y) \rightarrow \neg X \\ \varphi_3 = X \leftrightarrow (Z \rightarrow (\neg X \wedge Y)) & \psi_3 = (Z \rightarrow (X \vee Y)) \rightarrow (X \wedge \neg Z) \\ \varphi_4 = \varphi_3 & \psi_4 = ((\neg X \wedge \neg Y) \rightarrow Z) \wedge (Y \rightarrow X) \wedge (Z \rightarrow \neg X). \end{array}$$

Verwenden Sie dazu die einfachen Äquivalenzen aus Satz 3.46. Geben Sie bei jeder Umformung die Äquivalenz an, die Sie benutzen!

**3. Aufgabe** (5 Punkte):

Sei  $n \geq 1$  eine natürliche Zahl. Eine Formelmenge  $\Phi \subseteq \text{AL}$  heißt *n-repräsentativ*, wenn es zu jeder Formel  $\psi \in \text{AL}$  mit  $\text{var}(\psi) \subseteq \{V_1, \dots, V_n\}$  eine Formel  $\varphi \in \Phi$  gibt, die zu  $\psi$  äquivalent ist.

- Geben Sie eine 2-repräsentative Menge an. (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)
- Wieviel Formeln enthält eine *n*-repräsentative Menge mindestens? Begründen Sie Ihre Antwort.

**4. Aufgabe** (4 Punkte):

- Geben Sie zu den folgenden Formeln jeweils die dualen Formeln an:

(i)  $(W \wedge \neg X) \vee ((\mathbf{1} \wedge Z) \vee \neg Y)$

(ii)  $(\mathbf{0} \vee \mathbf{1}) \vee \neg(\neg Z \vee (Y \wedge Z))$

(b) Beweisen Sie, daß für alle Formeln  $\varphi$ , in denen keine Implikation und keine Biimplikation vorkommt, gilt:

$$\varphi \text{ erfüllbar} \iff \tilde{\varphi} \text{ nicht allgemeingültig.}$$

(c) Geben Sie die Wahrheitstabelle für einen zur Implikation dualen Junktor an! D.h., definieren Sie einen 2-stelligen Junktor  $\tilde{\rightarrow}$ , so daß für alle  $X, Y \in \text{AVAR}$  und alle Belegungen  $\mathcal{B}$  für  $\{X, Y\}$  gilt:

$$\llbracket X \tilde{\rightarrow} Y \rrbracket^{\mathcal{B}} = 1 - \llbracket X \rightarrow Y \rrbracket^{\mathcal{B}}.$$