



Übungsaufgaben zur Vorlesung  
Theoretische Informatik I  
WS 2005/2006

Übungsblatt 7  
06.12.2005, Abgabe 13.12.2005, 9:15 Uhr

**1. Aufgabe** (6 Punkte):

Ein *aussagenlogisches Beweissystem* ist ein Paar  $B = (A, R)$ , bestehend aus einer Menge  $A \subseteq \text{AL}$  von Formeln (den *Axiomen* des Systems) und einer Menge  $R$  von Ableitungsregeln (die *Regeln* des Systems).

Das System ABS aus der Vorlesung ist ein Beispiel eines aussagenlogischen Beweissystems.

- (a) Definieren Sie sinnvoll (wie es in der Vorlesung für das System ABS geschehen ist), was es für ein beliebiges aussagenlogisches Beweissystem  $B$  bedeutet, daß eine Formel  $\psi \in \text{AL}$  aus einer Formelmenge  $\Phi \subseteq \text{AL}$  im System  $B$  beweisbar ist.

Für ein aussagenlogisches Beweissystem  $B$ , eine Formelmenge  $\Phi \subseteq \text{AL}$  und eine Formel  $\psi \in \text{AL}$  schreiben wir  $\Phi \vdash_B \psi$ , wenn  $\psi$  aus  $\Phi$  in  $B$  beweisbar ist. Wir nennen das System  $B$  *korrekt*, wenn für alle  $\Phi \subseteq \text{AL}$  und alle  $\psi \in \text{AL}$  gilt:

$$\Phi \vdash_B \psi \implies \Phi \models \psi.$$

- (b) Sei  $B = (A, R)$  ein aussagenlogisches Beweissystem, für das alle Axiome  $\phi \in A$  allgemeingültig und alle Regeln  $\rho \in R$  korrekt sind. Zeigen Sie, daß  $B$  korrekt ist.
- (c) Sei  $B$  folgendes aussagenlogische Beweissystem:

*Axiome:* Alle allgemeingültigen Formeln.

*Regeln:* Modus Ponens, d.h., für alle Formeln  $\phi, \psi$  die Ableitungsregel

$$\frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi}.$$

Zeigen Sie, daß  $B$  korrekt ist.

**2. Aufgabe** (5 Punkte):

Zeigen Sie, dass folgende Regeln in ABS ableitbar sind:

(a)  $\frac{\psi}{\varphi \vee \psi}$

(b)  $\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$ .

*Hinweis:* Die Formeln  $\varphi \vee \psi$  und  $\varphi \wedge \psi$  sind Abkürzungen für  $\neg\varphi \rightarrow \psi$  bzw.  $\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$ .

**3. Aufgabe** (5 Punkte):

Beweisen Sie, daß folgende Formeln in ABS aus  $\emptyset$  ableitbar sind:

(a)  $(\varphi \vee (\psi \vee \chi)) \rightarrow (\varphi \vee \neg\varphi)$

(b)  $(\neg\varphi \wedge \psi) \rightarrow ((\varphi \vee \neg\psi) \rightarrow \chi)$

*Hinweis:* Benutzen Sie ggf. das Deduktionslemma.

**4. Aufgabe** (4 Punkte):

Sei  $L$  eine beliebige unendliche Menge von natürlichen Zahlen, dargestellt als Binärzahlen. (Zum Beispiel die Primzahlen  $L = \{10, 11, 101, 111, 1011, \dots\}$  oder aber die geraden Zahlen  $L = \{0, 10, 100, 110, \dots\}$ ). Man beweise, daß es eine unendliche Folge  $w_1, w_2, \dots$  von paarweise verschiedenen Binärzahlen gibt, so daß  $w_i$  Anfangsstück von  $w_{i+1}$  und von mindestens einem Element aus  $L$  ist ( $i = 1, 2, \dots$ ).