Humboldt–Universität zu Berlin
Institut für Informatik

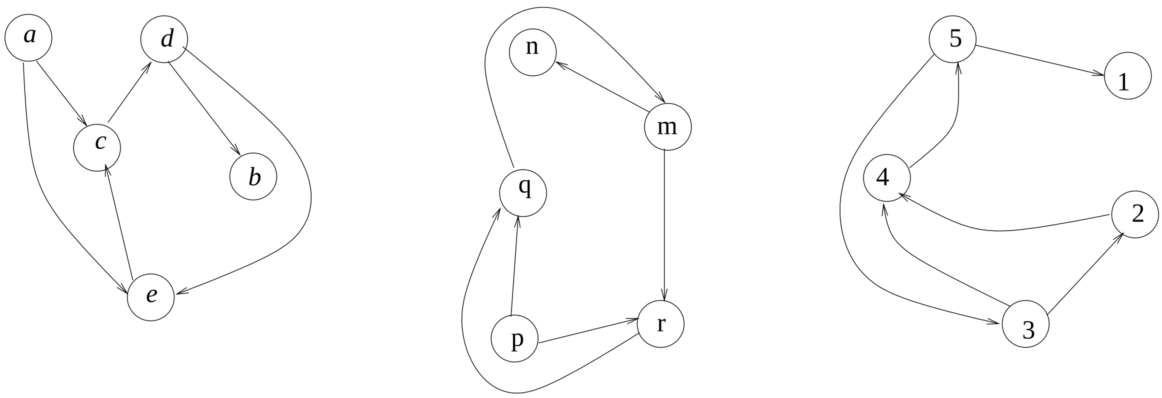
Logik in der Informatik
Prof. M. Grohe

Übungsaufgaben zur Vorlesung Theoretische Informatik I WS 2005/2006

Übungsblatt 9
05.01.2006, Abgabe 12.01.2006, 9:15 Uhr

1. Aufgabe (5 Punkte):

Gegeben seien die drei Digraphen $\mathcal{G}_1$,$\mathcal{G}_2$ und $\mathcal{G}_3$.



Der Digraph $\mathcal{G}_1$ läßt sich als σ_{Graph}-Struktur (wobei $\sigma_{Graph} := \{\dot{E}\}$) mit $\mathcal{G}_1 = (G_1, \dot{E}^{\mathcal{G}_1})$ wie folgt darstellen:

$$G_1 = \{a, b, c, d, e\} \text{ und } \dot{E}^{\mathcal{G}_1} = \{(a, c), (a, e), (c, d), (d, b), (d, e), (e, c)\}.$$

(a) Stellen Sie auch $\mathcal{G}_2$ und $\mathcal{G}_3$ jeweils als σ_{Graph}-Struktur dar.

(b) Überprüfen Sie, ob

(i) $\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_2$
(ii) $\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_3$
(iii) $\mathcal{G}_2 \cong \mathcal{G}_3$

gilt.

(c) Geben Sie für die Unterpunkte von Punkt (b), in denen die Antwort ja ist, je einen Isomorphismus an.

2. Aufgabe (5 Punkte):

(a) Seien $\mathcal{B}_2$ bzw. $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$ die in der Vorlesung definierte Boolesche Algebra bzw. Potenzmengenalgebra (vgl. S. 281). Beweisen Sie, daß $\mathcal{B}_2 \cong \mathcal{P}(\{\emptyset\})$.

(b) Sei $\dot{E}$ ein 2-stelliges Relationssymbol, und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ endliche $\{\dot{E}\}$-Strukturen, so dass gilt:

- A ist abzählbar unendlich.
- $E^{\mathcal{A}}$ ist eine Äquivalenzrelation auf A mit zwei Äquivalenzklassen, die beide unendlich groß sind.
- $B := \mathbb{N}$.
- $E^{\mathcal{B}} := \{(n, m) \in B^2 \mid n - m \text{ ist gerade}\}$.

Beweisen Sie, dass $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

3. Aufgabe (5 Punkte):

Eine *Färbung* eines Graphen $\mathcal{G}= (V, E)$ mit Farben aus einer Menge C ist eine Abbildung $f : V \longrightarrow C$, so daß für alle Kanten $(v_1, v_2) \in E$ (d.h. die Ecken v_1 und v_2 sind benachbart) stets gilt $f(v_1) \neq f(v_2)$. Der Graph $\mathcal{G}$ ist $C-$färbbar, wenn eine Färbung von $\mathcal{G}$ mit Farben aus C existiert.

Der Graph $\widetilde{\mathcal{G}}= (\widetilde{V}, \widetilde{E})$ heißt ein *Teilgraph* von $\mathcal{G}= (V, E)$, wenn $\widetilde{V} \subseteq V$ und $\widetilde{E} = \widetilde{V}^2 \cap E$.

Sei jetzt $\mathcal{G}= (V, E)$ ein Graph, wobei V abzählbar unendlich ist und sei C eine endliche Menge von Farben.

(a) Geben Sie eine unendliche Formelmenge Φ an, die genau dann erfüllbar ist, wenn $\mathcal{G}$ $C-$färbbar ist.

(b) Zeigen Sie, daß $\mathcal{G}$ $C-$färbbar ist, wenn jeder endliche Teilgraph $\widetilde{\mathcal{G}}$ von $\mathcal{G}$ $C-$färbbar ist.

Hinweis: Benutzen Sie den Endlichkeitssatz.

4. Aufgabe (5 Punkte):

Sei A eine Menge und $R \subseteq A^2$. Sei $\hat{R}$ die folgendermaßen definierte 2-stellige Relation auf A:

Basisregel: Für alle $a \in A$ gilt: $(a, a) \in \hat{R}$
Rekursive Regel: Für alle $a, b, c \in A$ gilt: Wenn $(a, b) \in \hat{R}$ und $(b, c) \in R$, so $(a, c) \in \hat{R}$.

Zeigen Sie, daß $\hat{R} = R^*$, wobei R^* die reflexive transitive Hülle von R ist.