Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität
Dr. Mathias Schacht

WS 2006/2007
24. Oktober 2006

Theoretische Informatik II

1. Serie

Abgabe bis 9:25 Uhr am 31. Oktober

Aufgabe 1 [2 Punkte]

Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine Relation R auf $\mathbb{N}$ an, welche die folgenden Bedingungen erfüllt und weisen Sie die entsprechenden Eigenschaften nach:

(a) R ist reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv.

(b) R ist transitiv aber nicht symmetrisch.

(c) R ist symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv.

(d) R ist eine Äquivalenzrelation mit 4 Äquivalenzklassen.

Aufgabe 2 [1 Punkt]

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Beweisen Sie die folgende Identität

$$\Sigma^* b\{b, aa, ab\}^* = \Sigma^* b\{aa\}^* .$$

Aufgabe 3 [4 Punkte]

Für eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei

$$L_f := \left\{a^{f(n)} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

die Sprache aller Wörter über das unäre Alphabet $\Sigma = \{a\}$, welche Länge $f(n)$ haben für irgendein $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $f(n) = 5n+2$, geben Sie eine *reguläre* Grammatik an die L_f erzeugt und beweisen Sie das diese Grammatik tatsächlich L_f erzeugt.

(b) Sei $g(n) = 2^n$, geben Sie eine Grammatik an die L_g erzeugt. Können Sie eine reguläre Grammatik finden? Warum nicht?

Aufgabe 4 [4 Punkte]

Geben Sie für jede der angegebenen Sprachen eine *kontextfreie* Grammatik an und zeigen Sie deren Korrektheit:

(a) $\{\boldsymbol{w} \in \{a, b, c\}^* \mid |\boldsymbol{w}| \text{ ist ungerade und in der Mitte steht ein } b\}$

(b) $\{\boldsymbol{w} \in \{a, b\}^* \mid \boldsymbol{w} \text{ enthält mehr } a\text{'s als } b\text{'s}\}$

(c) $\{a^i b^j c^k \in \{a, b, c\}^* \mid i, j, k \in \mathbb{N} \text{ und } (i = j \text{ oder } j = k)\}$

(d) Für ein Wort $\boldsymbol{w}$ sei $\boldsymbol{w}^{\mathcal{R}}$ das Wort mit den selben Zeichen, aber in umgekehrter Reihenfolge. Wörter $\boldsymbol{w}$ mit der Eigenschaft $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}^{\mathcal{R}}$ nennt man auch Palindrome. Beachte das leere Wort erfüllt ebenfalls $\varepsilon = \varepsilon^{\mathcal{R}}$. Geben Sie eine *kontextfreie* Grammatik für die Sprache der Palindrome $\{\boldsymbol{w} \in \{a, b, c\}^* \mid \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}^{\mathcal{R}}\}$ an.

Aufgabe 5 [5 Punkte]

Sei L eine beliebige Sprache über ein beliebiges Alphabet Σ. Wir definieren die Sprache der Prefixe ($\mathrm{pref}(L)$), der Suffixe ($\mathrm{suff}(L)$) und der Teilsequencen ($\mathrm{seq}(L)$) von L wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{pref}(L) &= \{\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma^* \mid \exists\, \boldsymbol{\tau} \in \Sigma^* \colon\ \boldsymbol{\sigma\tau} \in L\} \\ \mathrm{suff}(L) &= \{\boldsymbol{\tau} \in \Sigma^* \mid \exists\, \boldsymbol{\tau} \in \Sigma^* \colon\ \boldsymbol{\sigma\tau} \in L\} \\ \mathrm{seq}(L) &= \{\boldsymbol{\varrho} \in \Sigma^* \mid \exists\, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \Sigma^* \colon\ \boldsymbol{\sigma\varrho\tau} \in L\} \end{aligned}$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Im Allgemeinen gilt nicht $\mathrm{pref}(L) \subseteq L$.

(b) $\mathrm{seq}(L) = \mathrm{suff}(\mathrm{pref}(L))$

(c) $\mathrm{suff}(L) = \mathrm{pref}(L^{\mathcal{R}})^{\mathcal{R}}$, wobei wir für eine Sprache A über Σ mit $A^{\mathcal{R}}$ die Sprache aller umgekehrten Wörter bennen, d.h. $A^{\mathcal{R}} := \{\boldsymbol{w}^{\mathcal{R}} \mid \boldsymbol{w} \in A\}$ mit $\boldsymbol{w}^{R}$ wie in Aufgabe 3(iv).

(d) Wenn L regulär ist, dann ist $\mathrm{pref}(L)$ regulär.

(e) Wenn L regulär ist, dann sind $\mathrm{suff}(L)$ und $\mathrm{seq}(L)$ regulär.