

## Theoretische Informatik II

### 11. Serie

Abgabe bis 9:25 Uhr am 30. Januar

#### Aufgabe 1 [4 Punkte]

Beweisen Sie, dass  $L_{2\text{-SAT}}$  in  $\mathbf{P}$  ist. Begründen Sie, warum der von Ihnen angegebene Beweis sich nicht auf  $L_{3\text{-SAT}}$  erweitern lässt.

#### Aufgabe 2 [4 Punkte]

Beweisen Sie, dass falls  $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$  gilt, dann existiert ein polynomieller Algorithmus, der für eine gegebene, erfüllbare, boolesche Formel  $\phi$  eine erfüllende Belegung findet.

#### Aufgabe 3 [4 Punkte]

Sei  $X$  eine endliche Menge und für  $k \in \mathbb{N}$  seien  $E_1, \dots, E_k \subseteq X$  Untermengen von  $X$ . Dann heißt  $(X, E_1, \dots, E_k)$  *spaltbar*, falls es eine 2-Färbung  $f: X \rightarrow \{\text{rot}, \text{blau}\}$  von  $X$  gibt, so dass keine der Mengen  $E_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) einfarbig unter  $f$  ist, d.h. für jedes  $i = 1, \dots, k$  existieren  $u$  und  $v \in E_i$  mit  $f(u) \neq f(v)$ . Beweisen Sie, dass die Sprache

$$L_{\text{SET-SPLIT}} := \{ \langle X, E_1, \dots, E_k \rangle \mid (X, E_1, \dots, E_k) \text{ ist spaltbar.} \}$$

$\mathbf{NP}$ -vollständig ist.

#### Aufgabe 4 [4 Punkte]

Sei  $\Sigma$  ein Alphabet und  $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$  eine Familie von Sprachen. Wir definieren  $\text{co } \mathcal{L}$  als die Sprachklasse der komplementären Sprachen aus  $\mathcal{L}$ :

$$\text{co } \mathcal{L} := \{ \bar{L} = \Sigma^* \setminus L \mid L \in \mathcal{L} \}.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (a)  $\text{co } \mathbf{P} = \mathbf{P}$ .
- (b) falls  $L \leq_{\mathbf{P}} L'$ , dann gilt  $\bar{L} \leq_{\mathbf{P}} \bar{L}'$ .
- (c) falls  $L$   $\mathbf{NP}$ -vollständig ist, dann ist  $\bar{L}$   $\text{co } \mathbf{NP}$ -vollständig, d.h.  $K \leq_{\mathbf{P}} \bar{L}$  für alle  $K \in \text{co } \mathbf{NP}$ .
- (d) Die folgende Sprache ist  $\text{co } \mathbf{NP}$ -vollständig:

$$L_{\text{TAUT}} = \{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ ist eine boolesche Formel} \\ \text{für die jede Belegung eine erfüllende Belegung ist} \}.$$