

Theoretische Informatik II

12. Serie

Abgabe bis 9:25 Uhr am 6. Februar

Aufgabe 1

[4 Punkte]

Beweisen Sie, dass die folgende Variante des Erfüllbarkeitsproblems **NP**-vollständig ist:

$$L_{\text{SAT}^3} := \{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ ist eine boolesche Formel mit mindestens 3 erfüllbaren Belegungen} \}.$$

Aufgabe 2

[4 Punkte]

Sei Σ ein beliebiges Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine nicht-triviale Sprache, d.h. $L \neq \emptyset$ und $L \neq \Sigma^*$. Beweisen Sie, dass falls $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ und $L \in \mathbf{NP}$, dann ist L auch **NP**-vollständig.

Aufgabe 3

[1+1+3+3 Punkte]

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass

$$L_{\text{CLIQUE}} = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ ist ein ungerichteter Graph der eine } k\text{-Clique enthält} \}$$

NP-vollständig ist. Sei $\omega(G)$ die größte Clique in G , d.h.

$$\omega(G) := \max\{k \in \mathbb{N} \mid \langle G, k \rangle \in L_{\text{CLIQUE}}\}.$$

Wir definieren die Sprachen:

$$L_{\text{MAX-CLIQUE}} := \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ ist ein ungerichteter Graph mit } \omega(G) = k \}$$

und

$$L_{\text{CLIQUE}(k)} := \{ \langle G \rangle \mid G \text{ ist ein ungerichteter Graph mit } \omega(G) \geq k \}.$$

- (a) Beweisen Sie, dass $L_{\text{MAX-CLIQUE}}$ **NP**-schwer ist.
- (b) Begründen Sie, warum die folgendende Argumentation *nicht* $L_{\text{MAX-CLIQUE}} \in \mathbf{NP}$ beweist:

Sei M eine NTM, welche bei Eingabe von G und k , zuerst $k+1$ Knoten nichtdeterministisch rät und dann überprüft, ob die $k+1$ geratenen Knoten eine k -Clique, aber keine $(k+1)$ -Clique in G aufspannen.

- (c) Beweisen Sie, dass falls $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, dann gilt
- (c1) $L_{\text{MAX-CLIQUE}} \in \mathbf{P}$.
- (c2) es gibt einen polynomiellen Algorithmus, der eine Clique maximaler Größe in G findet.
- (d) Beweisen Sie, dass für jedes feste $k \in \mathbb{N}$ gilt $L_{\text{CLIQUE}(k)} \in \mathbf{P}$. Warum impliziert dies nicht $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, obwohl L_{CLIQUE} **NP**-vollständig ist?