Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität
Dr. Mathias Schacht

WS 2006/2007
31. Oktober 2006

Theoretische Informatik II

2. Serie

Abgabe bis 9:25 Uhr am 7. November

Aufgabe 1 [4 Punkte]

Wörter über dem Alphabet $\{0, 1\}$ wollen wir als Binärzahlen interpretieren, wobei das erste Zeichen dem höchstwertigen Bit entspricht. Sei L die Sprache der durch 4 teilbaren Wörter.

(a) Geben Sie eine weitere offensichtliche Beschreibung (in Worten) für diese Sprache an.

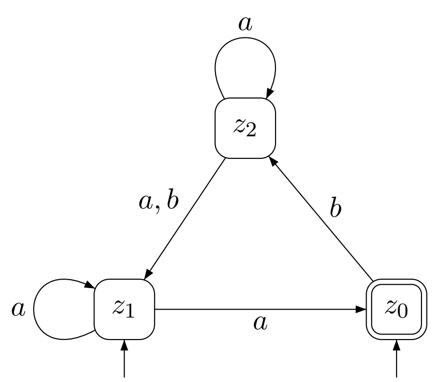
(b) Geben Sie einen DFA an, der $L \cup \{\varepsilon\}$ erkennt.

(c) Geben Sie den regulären Ausdruck an, der $L \cup \{\varepsilon\}$ erzeugt.

(d) Geben Sie eine reguläre Grammatik G an mit $L(G) = L \cup \{\varepsilon\}$.

Aufgabe 2 [4 Punkte]

Sei der folgende NFA M gegeben:



(a) Überführen Sie diesen NFA mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren in einen DFA M'.

(b) Ermitteln Sie den Minimalautomaten für L mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren.

Aufgabe 3 [4 Punkte]

In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass die regulären Sprachen unter Komplement, *, Vereinigung, Schnitt und Konkatenation abgeschlossen sind. Darüber hinaus zeigt die Bearbeitung von Aufgabe 5 der ersten Serie, dass die regulären Sprachen unter Präfix-, Suffix- und Teilsequenzbildung, sowie unter „Umkehrung“ (der $^{\mathcal{R}}$-Operation) abgeschlossen sind. Entscheiden Sie die entsprechende Fragestellung für die im Folgenden aufgelisteten Operationen.

Seien L und L' reguläre Sprachen über ein beliebiges Alphabet Σ. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $L \triangle L' := \{\boldsymbol{w} \in L \cup L' \mid \text{entweder } \boldsymbol{w} \in L \text{ oder } \boldsymbol{w} \in L', \text{ aber } \boldsymbol{w} \notin L \cap L'\}$ ist regulär.

(b) $\text{notpalin}(L) := \{\boldsymbol{w} \in \Sigma^* \mid \text{es gibt kein } \boldsymbol{u} \in L \text{ so dass } \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathcal{R}}\}$ ist regulär.

(c) $2\times(L) := \{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w} \in \Sigma^* \mid \boldsymbol{w} \in L\}$ ist regulär. (Beachten Sie $2\times(L) \neq LL$.)

(d) $\max(L) := \{\boldsymbol{w} \in L \mid \text{es gibt kein } \boldsymbol{u} \in \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\} \text{ so dass } \boldsymbol{w}\boldsymbol{u} \in L\}$ ist regulär.

Aufgabe 4 [4 Punkte]

Für natürliche Zahlen s und $k \in \mathbb{N}$ definiere

$$P_{s,k} := \{s + xk \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbb{N}\}.$$

Die Menge $P_{s,k}$ heißt auch *arithmetische Progression* mit Startpunkt (Anfangsglied) s und Schrittweite (Differenz) k. In anderen Worten, eine arithmetische Progression ist eine Reihe von natürlichen Zahlen die mit s beginnt und zwei benachbarte Mitglieder haben einen Abstand von genau k. Beachte das wir $k = 0$ erlauben, d.h. für alle $s \in \mathbb{N}$ ist $P_{s,0} = \{s\}$ die arithmetische Progression die nur s enthält. Falls $k \neq 0$, dann gilt $|P_{s,k}| = \infty$.

Sei L eine Sprache über das unäre Alphabet $\Sigma = \{a\}$. Beweisen Sie die folgende Charakterisierung regulärer Sprachen über Σ:

$$L \text{ ist regulär } \Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{N} \text{ und } s_1, \ldots, s_t, k_1, \ldots, k_t \in \mathbb{N}\colon\; L = \bigcup_{i=1}^{t} \left\{ a^n \mid n \in P_{s_i,k_i} \right\}.$$

In anderen Worten, L ist regulär genau dann wenn $\{|\boldsymbol{w}| \mid \boldsymbol{w} \in L\}$ (die Menge der Längen der in L vorkommenden Worte) sich als **endliche** Vereinigung von arithmetischen Progressionen schreiben läßt.