Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität
Dr. Mathias Schacht

WS 2006/2007
14. November 2006

Theoretische Informatik II

4'. Serie

Abgabe bis 9:25 Uhr am 21. November

Aufgabe 1 [4 Punkte]

Geben Sie für drei der vier aufgeführten Sprachen jeweils einen Kellerautomaten an der genau diese akzeptiert und begründen Sie jeweils die Korrektheit des angegebenen Kellerautomaten.

(a) $L(\mathcal{G})$ für

$$\mathcal{G}: \qquad S \to XY, \quad X \to aXb \mid ab, \quad Y \to bYc \mid bc$$

(b) $L := \{\boldsymbol{w} \in \{a,b\}^* \mid \boldsymbol{w} \text{ enthält doppelt so viele } a\text{'s wie } b\text{'s}\}$

(c) $L := \{a,b\}^* \setminus \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(d) $L := \{\boldsymbol{w}_1\$\boldsymbol{w}_2\$\ldots\$\boldsymbol{w}_k \mid k \geq 1\,,\ \boldsymbol{w}_i \in \{a,b\}^* \text{ und } \exists\, 1 \leq i \neq j \leq k\colon\ \boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{w}_j^{\mathcal{R}}\}$

Aufgabe 2 [4 Punkte]

Sei L eine kontextfreie und L' eine reguläre Sprache.

(a) Zeigen Sie, dass $L \cap L'$ eine kontextfreie Sprache ist.

(b) Ist $L \cap L'$ regulär? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 [4 Punkte]

Entscheiden Sie für drei der vier angegebenen Sprachen, ob diese kontextfrei sind? Beweisen Sie Ihre Antworten!

(a) $L := \{\boldsymbol{ww} \mid \boldsymbol{w} \in \{a,b\}^*\}$

(b) $L := \{\boldsymbol{u}\$\boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{u}^{\mathcal{R}} \text{ ist eine Teilsequenz von } \boldsymbol{w} \text{ mit } \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in \{a,b\}^*\}$

(c) $L := \{\boldsymbol{uw} \mid \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in \{a,b\}^*,\ |\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{w}|,\ \text{aber } \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{w}\}$

(d) $L := \{a^n b^m \mid n \leq m \leq 2n\}$

Aufgabe 4 [4 Punkte]

Zeigen Sie, dass folgende Umkehrung des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen *falsch* ist:

> Sei L eine Sprache. Angenommen es gibt eine Zahl n, so dass sich jedes Wort $\boldsymbol{w} \in L$ der Länge $|\boldsymbol{w}| \geq n$ zerlegen lässt in der Form $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{uvxyz}$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:
>
> (a) $|\boldsymbol{vy}| \geq 1$,
> (b) $|\boldsymbol{vxy}| \leq n$ und
> (c) für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\boldsymbol{uv}^k\boldsymbol{xy}^k\boldsymbol{z} \in L$.
>
> Dann ist L kontextfrei.

Hinweis: Betrachten Sie z.B. die Sprache $L = \{a^i b^j c^k d^l \mid i = 0 \text{ oder } j = k = l\}$.