

Theoretische Informatik II

5. Serie

Abgabe bis 9:25 Uhr am 28. November

Aufgabe 1

[4 Punkte]

Betrachten Sie die folgende Verallgemeinerung des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen:

Satz. Für jede kontextfreie Sprache L gibt es eine Zahl n , so dass für jedes Wort $w \in L$ der Länge $|w| \geq n$ folgendes gilt. Für jede beliebige Markierung, die mindestens n Buchstaben in w markiert, gibt es eine Zerlegung des Wortes w der Form $w = \mathbf{uvxyz}$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) mindestens ein Buchstabe aus \mathbf{vy} ist markiert,
- (ii) höchstens n Buchstaben in \mathbf{vxy} sind markiert und
- (iii) für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbf{uv^kxy^kz} \in L$. □

Zeigen Sie, dass dieser Satz eine wirkliche Verallgemeinerung des Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen indem sie beweisen,

- (a) dass das Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen aus dem Satz folgt und
- (b) dass $L = \{a^i b^j c^k d^\ell \mid i = 0 \text{ oder } j = k = \ell\}$ nicht kontextfrei ist. (Auf dem letzten Übungsblatt sollten Sie zeigen, dass sich dies nicht mit Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen nachweisen lässt.)

Aufgabe 2

[4 Punkte]

Sei $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.

- (a) Geben Sie einen PDA an, der das Komplement \bar{L} von L akzeptiert und erläutern Sie die Funktionsweise Ihres PDA.
- (b) Gibt es einen deterministischen Kellerautomaten, der \bar{L} akzeptiert? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3

[4 Punkte]

Sei L eine kontextfreie Sprache und $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ ein Kellerautomat der L akzeptiert. Zeigen Sie, dass L regulär ist, falls es eine natürliche Zahl $K \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für jedes Wort $w \in L$ gilt:

$$\text{wenn } (z_0, \mathbf{w}, \#) \vdash_M^* (z, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}) \in Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*, \quad \text{dann ist } |\boldsymbol{\gamma}| \leq K.$$

In anderen Worten, Sie sollen zeigen, dass $L = L(M)$ regulär ist, falls M mit einem endlichen Keller auskommt.

Aufgabe 4

[4 Punkte]

Geben Sie entweder eine kontextsensitive Grammatik oder eine Turingmaschine für die Sprache $L = \{\mathbf{ww} \mid \mathbf{w} \in \{a, b\}^*\}$ an und erläutern Sie die Korrektheit.