

Theoretische Informatik II

6. Serie

Abgabe bis 9:25 Uhr am 5. Dezember

Aufgabe 1

[4 Punkte]

Geben Sie einen deterministischen LBA an, der die Sprache $L = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a\}$ akzeptiert, und erläutern Sie die Korrektheit.

Hinweis: Arbeiten Sie die Eingabe wiederholt von links nach rechts ab und streichen Sie in jedem Durchlauf jeweils jedes zweite a weg.

Aufgabe 2

[2 Punkte]

Die Goldbachsche Vermutung lautet:

Jede gerade Zahl größer 3 ist die Summe zweier Primzahlen.

Einen Beweis der Goldbachschen Vermutung gibt es bisher nicht. Mit Hilfe von Computern konnte kein Gegenbeispiel für Zahlen kleiner als $2 \cdot 10^{17}$ gefunden werden. Darüber hinaus ist bekannt, dass sich jede hinreichend große Zahl als Summe einer Primzahl und einer Zahl mit höchstens zwei Primfaktoren darstellen lässt.

Gegeben seien die folgenden Funktionen $f(n): \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 1\}$ und $g(n): \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ definiert durch:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls die Goldbachvermutung stimmt,} \\ -1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

und

$$g(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ gerade ist und sich als Summe zweier Primzahlen schreiben lässt,} \\ 0, & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sind die angegebenen Funktionen berechenbar? Begründen Sie Ihre Antwort. Sie dürfen mit Hilfe des intuitiven Berechenbarkeitsbegriff argumentieren, d.h. Sie dürfen annehmen, dass z.B. die Grundrechenarten und der Primzahltest berechenbar sind.

Aufgabe 3

[6 Punkte]

- (a) Zeigen Sie das $f(n) = \lceil \log_2(n) \rceil$ eine berechenbare Funktion ist, indem Sie eine entsprechende deterministische 2-Band-Turingmaschine angeben und die Funktionsweise erläutern.

Hinweis: Benutzen Sie das zweite Band für die Ausgabe. Sie können davon ausgehen, dass die Eingabe n auf dem ersten Band rechts vom Lesekopf in Binärdarstellung ($\text{bin}(n)$) gegeben ist (wobei das erste Zeichen dem höchstwertigen Bit entspricht), und dass das zweite Band leer ist. Nach der Berechnung von $\lceil \log_2(n) \rceil$ soll die Maschine sich in einen Endzustand begeben und die Ausgabe soll rechts vom Lesekopf des zweiten Bandes in Binärdarstellung vorliegen.

- (b) Geben Sie eine 2-Band-Turingmaschine an, die $\lceil \log_3(n) \rceil$ berechnet. Sie können sich hierfür aussuchen, ob die Eingabe n in unärer oder binärer Darstellung gegeben ist. Die Ausgabe soll in jedem Fall wie in Teil (a) erfolgen (d.h. Binärdarstellung rechts vom Lesekopf auf dem zweiten Band).

Hinweis: Haben Sie Aufgabe 1 schon gelöst?

Aufgabe 4

[4 Punkte]

Konstruieren und erläutern Sie einen LBA, der eine Folge von a 's und b 's sortiert, wobei die a 's vor den b 's stehen sollen. Ausgehend von einem Startzustand z_0 sollte der LBA beispielsweise die Konfiguration $(\varepsilon, z_0, abbaaba)$ in die Konfiguration $(\varepsilon, z, aaaabbb)$ überführen und stoppen, d.h. z ist ein Endzustand.