

## Theoretische Informatik II

### 7. Serie

Abgabe bis 9:25 Uhr am 12. Dezember

#### Aufgabe 1

[4 Punkte]

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen LOOP-berechenbar sind, indem Sie entsprechende LOOP-Programme angeben:

- (a) MOD:  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ , wobei  $\text{MOD}(x, y) = x \bmod y$ .  
(b) DIV:  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ , wobei

$$\text{DIV}(x, y) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor & \text{falls } y \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (c) Für  $x = 0$  sei  $(0)_3$  die ternär-Darstellung von  $x$  und für  $x \in \mathbb{N}$ ,  $x > 0$  sei  $(x_k, \dots, x_0)_3$  mit  $x_i \in \{0, 1, 2\}$  die eindeutige ternär-Darstellung von  $x > 0$ , d.h.  $x = \sum_{i=0}^k x_i 3^i$  und  $x_k > 0$ .

Betrachten Sie die Funktion  $\text{REV}_3: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , wobei  $\text{REV}_3(x) = y$  genau dann, wenn gilt:

ist  $(x_k, \dots, x_0)_3$  die ternär-Darstellung von  $x$ , dann ist  $(x_0, \dots, x_k)_3$  die ternär-Darstellung von  $y$  ist.

In anderen Worten  $\text{REV}_3$  interpretiert die Eingabe in ternär-Darstellung und berechnet die Zahl mit umgekehrter ternär-Darstellung.

#### Aufgabe 2

[4 Punkte]

Untersuchen Sie die folgenden  $\mu$ -rekursiven Funktionen. Falls die angegebene Funktion auch primitiv rekursiv ist, dann beweisen Sie dieses. Falls die angegebene Funktion nicht primitiv rekursiv ist, dann begründen Sie warum nicht und zeigen Sie, dass die Funktion  $\mu$ -rekursiv ist.

- (a)  $\overline{\text{sg}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , wobei

$$\overline{\text{sg}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x > 0, \\ 1, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

- (b) Für  $k > 1$  sei  $\text{max}_k: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ , wobei  $\text{max}_k(x_1, \dots, x_k) = \max\{x_1, \dots, x_k\}$ .  
(c)  $\delta: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ , wobei

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \neq y, \\ 1, & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

- (d)  $\text{sqrt}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , wobei

$$\text{sqrt}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{falls } \sqrt{x} \in \mathbb{N}, \\ \text{undef.}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Aufgabe 3**

[4 Punkte]

Untersuchen Sie die zweistellige Funktion  $f(x, y) = \binom{x+y+1}{2} + x$ . Zeigen Sie:

- (a)  $f$  ist eine bijektive Abbildung zwischen  $\mathbb{N}^2$  und  $\mathbb{N}$ .
- (b)  $f$  ist primitiv rekursiv.
- (c) es gibt primitiv rekursive Funktionen  $d_0$  und  $d_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , so dass für alle  $x, y, n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$d_0(f(x, y)) = x, \quad d_1(f(x, y)) = y \quad \text{und} \quad f(d_0(n), d_1(n)) = n.$$

*Hinweis:* Versuchen Sie, **einfache** LOOP-Programme für die Berechnung von  $d_0$  und  $d_1$  zu finden.

**Aufgabe 4**

[4 Punkte]

In der Literatur erscheinen verschiedene (aber im Wesentlichen äquivalente) Definitionen der Ackermannfunktion. Im folgenden betrachten wir einen weiteren solchen Ansatz. Für alle  $i \in \mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$  sei die Funktion  $f_i: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$  wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x && \text{für alle } x \in \mathbb{N}^+, \\ f_{i+1}(x) &= f_i^{(x)}(1) && \text{für alle } x \in \mathbb{N}^+, \end{aligned}$$

wobei  $f_i^{(x)}$  die  $x$ -mal iterierte Funktion  $f_i$  ist, d.h.  $f_i^{(x)}(1) = \underbrace{f_i(f_i(\dots f_i(f_i(1)) \dots))}_{x\text{-mal}}$ .

- (a) Um welche Funktionen handelt es sich bei  $f_2$  und  $f_3$ ?
- (b) Berechnen Sie  $f_i(1)$  für alle  $i \in \mathbb{N}^+$  und beschreiben Sie  $f_4(x)$  für  $x = 2, 3, 4$ .
- (c) Zeigen Sie, dass für jedes feste  $i \in \mathbb{N}^+$  die Funktion  $f_i$  primitiv rekursiv. Hierbei soll gelten:  $f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$  ist primitiv rekursiv, falls die Funktion  $f^*: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $f^*(x) = f(x+1)$  primitiv rekursiv ist.

*Bemerkung:* Die Funktionen  $f_i(y)$  wachsen vergleichbar stark wie  $a(i+1, y)$  und ähnlich wie in der Vorlesung bewiesen für  $a(n, n)$ , kann man zeigen, dass  $g: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$  definiert durch  $g(n) = f_n(n)$  nicht primitiv rekursiv ist.