INSTITUT FÜR INFORMATIK
ALGORITHMEN UND KOMPLEXITÄT
DR. MATHIAS SCHACHT

WS 2006/2007
12. DEZEMBER 2006

Theoretische Informatik II

8. Serie

Abgabe bis 9:25 Uhr am 19. Dezember

Aufgabe 1 [4 Punkte]

Sei $k \geq 1$ beliebig und seien $L_1, \ldots, L_k \subseteq \Sigma^*$ semi-entscheidbare Sprachen über dem selben Alphabet Σ, welche Σ^* partitionieren, d.h.

$$L_i \cap L_j = \emptyset \text{ für alle } 1 \leq i < j \leq k \qquad \text{und} \qquad L_1 \dot\cup \ldots \dot\cup L_k = \Sigma^*.$$

Was können Sie für alle $i = 1, \ldots, k$ über die Entscheidbarkeit von L_i aussagen?

Aufgabe 2 [4 Punkte]

Das spezielle Halteproblem $K := \{\boldsymbol{w} \in \{0,1\}^* \mid M_{\boldsymbol{w}} \text{ hält auf Eingabe } \boldsymbol{w}\}$ haben wir in der Vorlesung auf Entscheidbarkeit untersucht. In dieser Übungsaufgabe sollen Sie es auf Semi-Entscheidbarkeit untersuchen. Beantworten Sie dazu folgende Fragen und beweisen Sie Ihre Antworten:

(a) Ist K semi-entscheidbar?

(b) Ist das Komplement $\overline{K} := \{\boldsymbol{w} \in \{0,1\} \mid \boldsymbol{w} \notin K\}$ von K semi-entscheidbar?

Aufgabe 3 [4 Punkte]

Sei $\Sigma \subset \mathbb{N}$ ein durch $<$ geordnetes Alphabet. Die *lexikographische Ordnung* $(<_{\text{lex}}, \leq_{\text{lex}})$ auf Σ^* ist dann wie folgt definiert. Für $\boldsymbol{u} = u_1 \ldots u_\ell$ und $\boldsymbol{v} = v_1 \ldots v_k \in \Sigma^*$ gilt

$$\boldsymbol{u} <_{\text{lex}} \boldsymbol{v} \;\Leftrightarrow\; \text{entweder } \ell < k \text{ oder } \ell = k \text{ und } \exists i \leq \ell\colon\ u_1 \ldots u_{i-1} = v_1 \ldots v_{i-1} \text{ und } u_i < v_i\,,$$
$$\boldsymbol{u} \leq_{\text{lex}} \boldsymbol{v} \;\Leftrightarrow\; \text{entweder } \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \text{ oder } \boldsymbol{u} <_{\text{lex}} \boldsymbol{v}\,.$$

Offensichtlich gibt es für alle $\Sigma \subset \mathbb{N}$ eine berechenbare Bijektion (Abzählung) $\sigma\colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$, so dass $\sigma(i) <_{\text{lex}} \sigma(j)$, falls $i < j$.

Eine Sprache $L \subset \Sigma^*$ heißt *in lexikographischer Ordnung rekursiv aufzählbar*, falls $L = \emptyset$ oder falls es eine berechenbare Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ mit Wertebereich $\{f(i) \mid i \in \mathbb{N}\} = L$ gibt, so dass $f(i) \leq_{\text{lex}} f(j)$, falls $i < j$. Zeigen Sie:

(a) L ist genau dann in lexikographischer Ordnung rekursiv aufzählbar, wenn L entscheidbar ist. (Sie dürfen o.B.d.A. $|L| = \infty$ annehmen.)

(b) Jede unendliche, semi-entscheidbare Sprache L enthält eine unendliche entscheidbare Teilsprache $L' \subseteq L$.

Aufgabe 4 [4 Punkte]

Sei L eine Sprache über Σ. Wir wollen einen „Aufzähler“ für L definieren. Grob gesprochen ist ein *Aufzähler* für L eine Turingmaschine M mit „angeschlossenem Drucker“. Diese TM M kann den Drucker als Ausgabegerät zum Drucken des derzeitigen Bandinhalts rechts vom Schreib-Lesekopf benutzen. Formal kann ein Aufzähler z.B. als eine 2-Band-TM definiert werden, welche das zweite Band nur „zum Drucken“ benutzt und gedruckte Wörter mit einem zusätzlichen Zeichen trennt.

(a) Zeigen Sie: es gibt einen Aufzähler für L genau dann, wenn L semi-entscheidbar ist.

(b) Beschreiben Sie informell einen Aufzähler für $L = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.