Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität
Dr. Mathias Schacht

SS 2007
23. Mai 2007

Theoretische Informatik III

3. Serie

Abgabe bis 13:00 Uhr am 1. Juni

Aufgabe 1 [2 Punkte]

Begründen Sie, warum es keine dynamische Datenstruktur geben kann, welche die Operationen `Insert` und `ExtractMin` für n Datensätze jeweils in der Laufzeit $O(\log\log n)$ realisiert.

Aufgabe 2 [4+1+2 Punkte]

Eine $n \times m$ Matrix ist eine *Min-Tabelle*, falls die Einträge in jeder Zeile (von links nach rechts) und in jeder Spalte (von oben nach unten) aufsteigend sortiert sind. Einige der Einträge einer Min-Tabelle können ∞ sein; diese behandeln wir als nicht existierende Elemente.

(a) Geben Sie Algorithmen für die Implementierung von `ExtractMin`, `Insert` und `Search` für Min-Tabellen an, welche für Min-Tabellen der Größe $n \times m$ eine Laufzeit von $O(n + m)$ haben. (Erläutern sie jeweils die Korrektheit und beweisen Sie die Laufzeitabschätzung.)

(b) Zeigen Sie, wie mit einer $n \times m$ $(n \leq m)$ Min-Tabelle nm Zahlen in Zeit $O(nm^2)$ ohne Verwendung eines anderen Sortierverfahrens sortiert werden können.

(c) Aus der Vorlesung ist Ihnen die Datenstruktur des Min-Heaps bekannt, welche die Operationen `ExtractMin`, `Insert` für n Elemente in $O(\log n)$ unterstützt. Darüberhinaus kann man `Search` für Min-Heaps in $O(n)$ implementieren.

Angenommen Sie sollen höchstens $N = n^2$ Datensätze verwalten. Wann würden Sie Min-Heaps den Min-Tabellen vorziehen? Geben Sie ein Szenario an, in welchem Sie Min-Tabellen benutzen würden.

Aufgabe 3 [4 Punkte]

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| \geq 2$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es existieren zwei Knoten $u, v \in V$ $(u \neq v)$, so dass $\deg_G(u) = \deg_G(v)$.

(b) Der Komplementgraph $\overline{G}$ von $G = (V, E)$ ist der Graph auf derselben Knotenmenge V, welcher alle Kanten e enthält, die nicht zu G gehören, d.h.

$$\overline{G} := \left(V, \tbinom{V}{2} \setminus E\right).$$

Beweisen Sie, das mindestens einer der Graphen G oder $\overline{G}$, zusammenhängend ist.

Aufgabe 4 [3 Punkte]

Wählen Sie 3 der folgenden Aussagen und zeigen Sie, dass diese für einen Graphen $G = (V, E)$ äquivalent sind:

(*i*) G ist ein Baum;

(*ii*) G ist zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$;

(*iii*) G ist kreisfrei und $|E| = |V| - 1$;

(*iv*) G ist *kantenmaximal kreisfrei*, d.h. G ist kreisfrei, aber für jede Kante $e \in \binom{V}{2} \setminus E$ gilt $G' = (V, E \cup \{e\})$ enthält einen Kreis;

(*v*) G ist *kantenminimal zusammenhängend*, d.h. G ist zusammenhängend, aber für jede Kante $e \in E$ gilt $G'' = (V, E \setminus \{e\})$ ist nicht zusammenhängend;

(*vi*) Für alle u, $v \in V$ gilt: es existiert genau ein u-v-Pfad in G.