

## Theoretische Informatik III

### 4. Serie

Abgabe bis 13:00 Uhr am 15. Juni

#### Aufgabe 1

[4 Punkte]

Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph mit mindestens zwei Knoten und sei  $T$  ein Tiefensuchbaum von  $G$  mit Wurzel  $w$ . Beweisen Sie folgende Aussagen.

- (i) Sei  $G' = G - w$  der Graph, den man durch Löschen von  $w$  in  $G$  erhält. D.h.  $G' = (V', E')$ , wobei  $V' := V \setminus \{w\}$  und  $E' := \{u, v\} \in E \mid u \neq w \text{ und } v \neq w\}$ . Dann gilt:  $G'$  ist zusammenhängend genau dann, wenn  $\deg_T(w) = 1$ .
- (ii) Sei  $\ell_G$  die Länge des längsten Pfades im Graphen  $G$  und  $h_T$  die Höhe des Baumes  $T$ . Dann gilt:

$$h_T \geq \lfloor \log_2 \ell_G \rfloor.$$

(Hinweis:  $\lfloor \log_2(x) \rfloor = \lfloor \log_2(x + \frac{1}{2}) \rfloor$  für alle natürlichen Zahlen  $x \geq 1$ .)

#### Aufgabe 2

[4 Punkte]

Für eine schriftliche Klausur sollen  $s$  Studenten auf zwei Räume aufgeteilt werden. Hierbei möchte man typischerweise vermeiden, dass zwei befreundeten Studenten derselbe Raum zugewiesen wird. Angenommen die Freundschaften unter den Studenten sind bekannt und es gibt  $f$  Paare von Studenten, die befreundet sind. Wie kann man feststellen, ob die Studenten so auf zwei Räume verteilt werden können, dass keine zwei Freunde denselben Raum zugewiesen bekommen. Entwickeln Sie einen effizienten Algorithmus der dieses Entscheidungsproblem löst und gegebenenfalls eine Aufteilung angibt. Beweisen Sie die Korrektheit und analysieren Sie die Laufzeit von Ihrem Algorithmus.

#### Aufgabe 3

[4 Punkte]

Sei  $G = (V, E)$  ein gewichteter Graph mit Gewichtsfunktion  $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei alle Kanten unterschiedliche Gewichte haben.

- (i) Zeigen Sie, dass unter dieser Bedingung der minimale Spannbaum von  $G$  eindeutig ist.
- (ii) Was können Sie über die Eindeutigkeit des zweitbesten minimalen Spannbaum sagen? (Ein Spannbaum ist zweitbesten minimaler Spannbaum, wenn nur der minimale Spannbaum ein Spannbaum mit kleinerem Gewicht ist.) Beweisen Sie Ihre Antwort.

#### Aufgabe 4

[4 Punkte]

Sei  $G = (V, E)$  ein gewichteter Graph mit Gewichtsfunktion  $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ . Für einen Spannbaum  $T$  von  $G$  sei  $m_T := \max_{e \in E(T)} w(e)$  das Gewicht der schwersten Kante in  $T$ . Sei  $\mathcal{T}_G$  die Menge aller Spannbäume von  $G$ . Zeigen Sie, dass für einen minimalen Spannbaum  $T$  von  $G$  gilt:

$$m_T \leq \min_{T' \in \mathcal{T}_G} m_{T'}.$$