Institut für Informatik | SS 2007
Algorithmen und Komplexität | 20. Juni 2007
Dr. Mathias Schacht

Theoretische Informatik III

5. Serie

Abgabe bis 13:00 Uhr am 29. Juni

Aufgabe 1 [4 Punkte]

Sei $A = (a_{ij})_{i\in[n],j\in[n]}$ die Adjazenzmatrix eines Graphen $G = ([n], E)$ mit n Knoten. Zeigen Sie, dass für jedes $k \geq 0$ der Eintrag b_{ij} der Matrix $B = A^k$ die Anzahl der Wege der Länge genau k zwischen i und j angibt.

Aufgabe 2 [4 Punkte]

Arbitrage ist die Ausnutzung von Diskrepanzen der Wechselkurse, um durch Umtauschen für eine Einheit einer Währung mehr als eine Einheit der gleichen Währung zu bekommen. Nehmen wir zum Beispiel an, dass man für einen US-Dollar 46,4 indische Rupien, für eine indische Rupie 2,5 japanische Yen und für einen Yen 0,0091 US-Dollar kaufen kann. Dann kann ein Händler für einen US-Dollar durch Umtauschen $46,4 \cdot 2,5 \cdot 0,0091 = 1,0556$ US-Dollar erwerben, was einem Profit von 5,56 Prozent entspricht.
Seien n Währungen und die $n \times n$ Wechselkurse gegeben. Entwickeln Sie einen effizienten Algorithmus für das Aufspüren von Arbitrage. Beweisen Sie die Korrektheit und analysieren Sie die Laufzeit von Ihrem Algorithmus.
Hinweis: In dem oben genannten Beispiel gilt:

$$\log(\tfrac{1}{46,4}) + \log(\tfrac{1}{2,5}) + \log(\tfrac{1}{0,0091}) = \log(\tfrac{1}{46,4} \cdot \tfrac{1}{2,5} \cdot \tfrac{1}{0,0091}) = \log(\tfrac{1}{1,0556}) < 0\,.$$

Aufgabe 3 [4 Punkte]

Betrachten Sie das folgende Spiel auf ungerichteten Graphen. Zwei Spieler A und B wählen jeweils abwechselnd Knoten eines gegebenen Graphen $G = (V, E)$. Der gewählte Knoten muss jeweils ein Nachbar des im vorigen Zug vom Gegenspieler gewählten Knoten sein. Ein Knoten kann maximal einmal gewählt werden. Spieler A beginnt mit einem beliebigen Knoten. Das Spiel endet, wenn einer der Spieler keinen Knoten mehr wählen kann. Der Spieler, der als letzter einen Knoten wählt, gewinnt. Wir sagen ein Spieler hat eine Gewinnstrategie für G, falls es ihm gelingt jedes Spiel (unabhängig von den Zügen des Gegenspielers) auf G zu gewinnen. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(*i*) Falls G ein perfektes Matching hat, dann gibt es eine Gewinnstrategie für B.

(*ii*) Falls G kein perfektes Matching hat, dann gibt es eine Gewinnstrategie für A.

Aufgabe 4 [4 Punkte]

Zeigen Sie, dass der folgende naheliegende Algorithmus zur Herstellung eines stabilen Matchings in einem balancierten, bipartiten Graphen (d.h. beide Knotenklassen haben die gleiche Kardinalität) nicht nach endlich vielen Schritten terminieren muss. Beginne mit einem beliebigen Matching. Ist das aktuelle Matching nicht perfekt, so füge eine Kante hinzu. Ist das aktuelle Matching perfekt aber nicht stabil, so füge eine Kante $\{x, y\}$ hinzu, die die Instabilität verursacht, und lösche die alten Matchingkanten (so vorhanden) der Knoten x und y.
Hinweis: Es existiert ein entsprechendes Beispiel auf dem $K_{3,3}$.