

Theoretische Informatik III

Klausur

Aufgabe 1

[6+4+4+4 Punkte]

Gegeben sei der folgende rekursive Sortieralgorithmus, der ein gegebenes Feld A zwischen dem i -ten und j -ten Eintrag (inklusive) sortieren soll.

Sort(A, i, j)

(1) Falls $A[i] > A[j]$, dann vertausche $A[i]$ und $A[j]$.

(2) Falls $i + 1 < j$, dann:

(3) Setze $k := \lfloor (j - i + 1) / 3 \rfloor$.

(4) Sort($A, i, j - k$).

//Die ersten 2/3 werden sortiert.

(5) Sort($A, i + k, j$).

//Die hinteren 2/3 werden sortiert.

(6) Sort($A, i, j - k$).

//Die ersten 2/3 werden nochmals sortiert.

- (a) Beweisen Sie, dass Sort($A, 1, n$) das Eingabefeld $A[1 \dots n]$ korrekt sortiert.
- (b) Geben Sie eine Rekursionsgleichung für die Laufzeit von Sort($A, 1, n$) im schlechtesten Fall an und schätzen Sie die Rekursionsgleichung asymptotisch ab.
- (c) Geben Sie die untere Komplexitätsschranke für das Sortieren an und definieren Sie die nötigen Begriffe dafür.
- (d) Wie beurteilen Sie die Laufzeit von Sort, im Vergleich zu anderen Ihnen bekannten Sortierverfahren?

Aufgabe 2

[6+2+6 Punkte]

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph und $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ eine Gewichtsfunktion.

- (a) Geben Sie die Definition eines *Spannbaumes von G* und alle dafür nötigen Begriffe an. Sie dürfen den Begriff Graph voraussetzen.
- (b) Was ist ein minimaler Spannbaum?
- (c) Beweisen Sie folgende Aussage. Sei $T = (V, F)$ ein Spannbaum von G , dann ist T ein minimaler Spannbaum von (G, w) genau dann, wenn es keine Kanten $e \in E \setminus F$ und $f \in F$ gibt, so dass $w(e) < w(f)$ und $T' = (V, (F \setminus \{f\}) \cup \{e\})$ ein Spannbaum von G ist.

Aufgabe 3

[4+6 Punkte]

- (a) Definieren Sie die Präfixfunktion π des KMP-Algorithmus für ein Muster $M = M_1 \dots M_m$.
- (b) Sei $S = S_1 \dots S_n \in \Sigma^n$ eine Zeichenkette der Länge n . Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ an, der das kürzeste Wort findet, welches S genau zweimal enthält. Beweisen Sie die Korrektheit und die Laufzeit von Ihrem Algorithmus.

Aufgabe 4

[6+4+8 Punkte]

- (a) Definieren Sie die Begriffe *Matching*, *maximales Matching* und *größtes Matching*.
- (b) Sei M ein maximales und M^* ein größtes Matching in einem nicht leeren Graphen G . Geben Sie bestmögliche untere und obere Schranken für $|M|/|M^*|$ an.
- (c) Geben Sie (ohne Begründung) den Wahrheitswert jeder der folgenden Aussagen an.

Achtung: Für jede richtig bewertete Aussage gibt es 2 Punkte. Für falsch bewertete Aussagen wird ein Punkt abgezogen. Allerdings werden Sie mindestens 0 Punkte für diese Teilaufgabe erhalten. Nicht bewertete Aussagen fließen nicht in die Punktzahl ein.

- (i) Sei (G, w) ein gewichteter Graph mit nichtnegativer Gewichtsfunktion. Sei $P = (v_1, v_2, \dots, v_\ell)$ ein kürzester v_1 - v_ℓ -Pfad. Dann ist für alle $1 \leq i < j \leq \ell$ der Teilpfad $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_j)$ ein kürzester v_i - v_j -Pfad. ✓
- (ii) Sei (G, w) ein gewichteter Graph mit nichtnegativer Gewichtsfunktion. Sei $P = (v_1, v_2, \dots, v_\ell)$ ein kürzester v_1 - v_ℓ -Pfad und sei $Q = (v_\ell, v_{\ell+1}, \dots, v_k)$ ein kürzester v_ℓ - v_k -Pfad. Dann ist der zusammengesetzte Pfad $PQ = (v_1, v_2, \dots, v_\ell, v_{\ell+1}, \dots, v_k)$ ein kürzester v_1 - v_k -Pfad. ✗
- (iii) Sei M ein Matching in G . Dann ist die Anzahl der Kanten eines augmentierenden Pfades bezüglich M immer gerade.
- (iv) Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, kreisfreier Graph und c_G die Anzahl der Zusammenhangskomponenten. Dann gilt: $|E| = |V| - c_G$.

Aufgabe 5

[6+4+6 Punkte]

Betrachten Sie das folgende Entscheidungsproblem. Für gegebenes $S \subseteq \mathbb{Z}$ und $c \in \mathbb{Z}$ soll entschieden werden, ob es zwei Zahlen $a, b \in S$ mit $a \neq b$ gibt, die $a + b = c$ erfüllen.

Entwickeln Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log n)$ und beweisen Sie die Korrektheit und die Laufzeit für die folgenden Fälle:

- (a) $|S| = n$ und $S \subseteq \{0, 1, \dots, 10n\}$.
- (b) $|S| = n$ und $S \subseteq \{-10n, \dots, -1, 0, 1, \dots, 10n\}$.
- (c) $|S| = n$ und $S \subseteq \mathbb{Z}$ beliebig. (Hinweis: Unter Umständen brauchen Sie einen ganz anderen Ansatz als in (a) und (b). Welcher Algorithmus hatte auch eine Laufzeit von $O(n \log n)$?)

Aufgabe 6

[4+4+6 Punkte]

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph der mindestens einen Kreis enthält. Die *Tailenweite* ($\text{girth}(G)$) ist die Länge eines kürzesten Kreises in G . Für zwei Knoten s und $t \in V$ sei $\text{dist}_G(s, t)$ die Länge (=Anzahl der Kanten) eines kürzesten s - t -Pfades in G .

- (a) Beweisen Sie, dass es Knoten s, t_1 und t_2 in V mit $\{t_1, t_2\} \in E$ gibt, so dass

$$\text{girth}(G) = \text{dist}_G(s, t_1) + \text{dist}_G(s, t_2) + 1.$$

- (b) Seien s, t_1 und t_2 drei verschiedene Knoten in V . Sei $\{t_1, t_2\} \in E$ und seien P_{s, t_1} und P_{s, t_2} kürzeste s - t_1 - bzw. s - t_2 -Pfade. Dann gilt $\text{girth}(G) \leq \text{dist}_G(s, t_1) + \text{dist}_G(s, t_2) + 1$, falls P_{s, t_1} und P_{s, t_2} die Kante $\{t_1, t_2\}$ nicht enthalten.
- (c) Entwerfen Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(|V||E|)$, der $\text{girth}(G)$ berechnet. Beweisen Sie die Korrektheit und die Laufzeit von Ihrem Algorithmus.