

Vorlesungsmitschrift

Mathematik für Informatiker

Kurs III

Wintersemester 2000/2001

Mitschrift und Satz:

Christoph Graupner*

Thorsten Vitt†

Daniela Weinberg‡

Version mathe3/2001-02-27

*graupner@informatik.hu-berlin.de

†vitt@informatik.hu-berlin.de

‡weinberg@informatik.hu-berlin.de

Disclaimer

Diese Mitschrift ist nur eine Verkettung von Zeichen eines endlichen Alphabets. Dr. Herrmann hat das nicht korrigiert, und wir garantieren nicht bestandene Prüfungen.

Mithilfe

Wir bekommen des öfteren Rückmeldungen, dass das Skript genutzt werde und praktisch sei, jedoch so gut wie nie Meldungen über irgendwelche Fehler darin. Wir wissen aber, dass welche drin sind ;-). Also wenn ihr Fehler findet, *meldet* die uns bitte. Schickt uns Korrekturen. Büüüütte. Am schnellsten werden die Korrekturen eingearbeitet, wenn ihr neben Versionsnummer des Skriptes (mathe3/2001-02-27) und Seitenzahl auch Satznummer, Vorlesungsdatum etc. einschickt, und das ganze an vitt@informatik.hu-berlin.de, weil der Kram auf Thorstens Seite liegt.

Internet

Diese Datei kommt von, und Aktualisierungen gibts (ggf.) auf:

<http://www.informatik.hu-berlin.de/~vitt/local/mathe/3/>

Inhaltsverzeichnis

I	Ausgewählte numerische Verfahren	1
§ 1	Berechnung von Polynomen, Hornerisches Schema	1
A	Hornerisches Schema	2
B	Das vollständige Hornerische Schema	2
C	Čebyšev-Polynome	4
§ 2	Interpolation und Quadratur	6
A	Existenzproblem des Interpolationsproblems 2.1	6
§ 3	Quadratur mit Hilfe von Interpolation	14
A	Quadratur und Interpolation	15
§ 4	Bernstein-Polynome und Bezier-Darstellung eines Polynoms	18
A	Nützliche Eigenschaften der Bernstein-Polynome	19
B	Differentiation der Bernstein-Polynome	20
C	Algorithmus von de Casteljaou	24
D	Geometrische Deutung des de Casteljaou-Algorithmus	26
§ 5	Stückweise polynomiale Funktionen	28
II	Wahrscheinlichkeitsrechnung	31
§ 1	Abzählmethoden	31
A	Fundamentales Abzählprinzip	31
§ 2	Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung	37
A	Modell der Wahrscheinlichkeitsrechnung	37
B	Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie	37
C	Endliche Wahrscheinlichkeitsräume	38
D	Laplace-Experiment (Laplace-Raum)	39
§ 3	Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit	41
A	Multiplikationssatz	41
B	Zufallsprozesse und Ereignisse	42
C	Partitionen und Bayes'sche Regel	43

Inhaltsverzeichnis

§ 4	Zufallsvariable	47
A	Verbundene Verteilungen	50
B	Allgemeine Theorie der Zufallsvariablen	54

Kapitel I

Ausgewählte numerische Verfahren

§ 1 Berechnung von Polynomen, Hornerisches Schema

2000-11-15

Aufgabe: Gegeben sei $p(x)$ ein Polynom aus \mathbb{K} und $\alpha \in \mathbb{K}$ (\mathbb{K} – ein Körper). Es soll „kostengünstig“ ($p\alpha$) berechnet werden.

Diese Aufgabe kann mit dem Hornerischen Algorithmus gelöst werden.

Es sei $p(x)$ gleich

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

Man kann $p(x)$ in der Form schreiben:

$$\underbrace{\left(\dots \left(\underbrace{(a_n \cdot x + a_{n-1})}_{a_{n-1}^{(1)}} \cdot x + a_{n-2} \right) \cdot x + \dots + a_1 \right) \cdot x + a_0}_{a_{n-2}^{(1)}}$$

Definition 1.1

Es seien

$$\begin{aligned} a_n^{(1)} &:= a_n \\ a_{n-\nu}^{(1)} &:= a_{n-\nu+1}^{(1)} - \alpha + a_{n-\nu}, \nu = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Satz 1.2

Es gilt

$$a_0^{(1)} = p(\alpha)$$

Beweis

$$p(a) = a_1^{(1)} \cdot \alpha + a_0 =: a_0^1$$

□

Satz 1.3 (Division mit Rest)

Teilt man $p(x)$ durch $(x - a)$, dann erhält man

$$p(x) = (x - a) \cdot p_1(x) + a_0^{(1)}$$

$$p_1(x) = \sum_{\nu}^n a_{\nu}^{(1)} \cdot x^{\nu-1}$$

$$= a_n^{(1)} \cdot x^{n-1} + a_{n-1}^{(1)} \cdot x^{n-2} + \dots + a_1^{(1)}$$

Beweis

$$p(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot p_1(\alpha) + a_0^{(1)}$$

$$p(\alpha) = a_0^{(1)}$$

$$p(x) = (x - \alpha) \left(a_1^{(1)} + a_2^{(1)}x + a_3^{(1)}x^2 + \dots + a_n^{(1)}x^{n-1} \right) + a_0^{(1)}$$

$$= a_1^{(1)} \cdot x + a_2^{(1)} \cdot x^2 + \dots + a_n^{(1)} \cdot x^n - \alpha \cdot a_1^{(1)} - \alpha \cdot a_2^{(1)} \cdot x - \alpha \cdot a_3^{(1)} \cdot x^2 - \dots - a_n^{(1)} \cdot \alpha \cdot x^{n-1} + a_0^{(1)}$$

$$= (a_0^{(1)} - \alpha \cdot a_1^{(1)}) + (a_1^{(1)} - \alpha \cdot a_2^{(1)}) \cdot x + \dots + (a_{n-1}^{(1)} - \alpha \cdot a_n^{(1)}) \cdot x^{n-1} + a_n^{(1)} \cdot x^n$$

$$= a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n \cdot x^n$$

A Horner'sches Schema

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_1	a_0	
		+	+	\dots	+	+	
α	—	$\alpha \cdot a_n^{(1)}$	$\alpha \cdot a_{n-1}^{(1)}$	\dots	\dots	$\alpha \cdot a_1^{(1)}$	
	$a_n^{(1)}$	$a_{n-1}^{(1)}$	$a_{n-2}^{(1)}$	\dots	$a_1^{(1)}$	$a_0^{(1)}$	$= p(\alpha)$

Beispiel

$$p := 5x^5 + 3x^3 - 2x^2 + x$$

p	5	0	3	-2	1	0
$x = 2$	—	10	20	46	88	178
p_1	5	10	23	44	89	178

$(x - 2)(5x^4 + 10x^3 + 23x^2 + 44x + 89)$ Rest 178 nach Satz 1.3

B Das vollständige Horner'sche Schema

Gegeben $p(x), \alpha$

$$p(x) = (x - \alpha) \cdot p_1(x) + a_0^{(1)} \quad (\text{Satz 1.3})$$

Satz 1.4

Es gilt

$$p'(\alpha) = p_1(\alpha) = \left(a_1^{(2)} \right)$$

Beweis

$$p'(x) = p_1(x) + (x - \alpha) \cdot p_1'(x)$$

$$p'(\alpha) = p_1(\alpha) + (\alpha - \alpha) \cdot p_1'(\alpha) = p_1(\alpha)$$

Beispiel

α	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
	8	12	-12	-9	+11	
-1	—	-8	-4	16	-7	
-1	8	4	-16	7	4	$= p(-1) = p^{(0)}(-1)$
-1	—	-8	4	12		
-1	8	-4	-12	19		$= p'(-1) = p^{(1)}(-1)$
-1	—	-8	12			
-1	8	-12	0			$= p''(-1) = p^{(2)}(-1)$
-1	—	-8				
-1	8	-20				$= \frac{1}{3!}p^{(3)}(-1)$
-1	—					
	8					$= \frac{1}{4!}p^{(4)}(-1)$

$$a_n^{n+1} = \frac{1}{n!}p^{(n)}(\alpha)$$

Problem: Gegeben $p(x)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Aufgabe: $p(x)$ soll im Punkt α entwickelt werden.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$p(x) = b_n (x - \alpha)^n + b_{n-1} (x - \alpha)^{n-1} + \dots + b_1 (x - \alpha) + b_0$$

$$b_n = \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!}, \quad b_i = \frac{p^{(i)}(\alpha)}{i!}$$

Beispiel

$$p(x) = x^3, \alpha = 1$$

$$p(x) = a(x - 1)^3 + b(x - 1)^2 + c(x - 1) + d$$

	1	0	0	0	
1	—	1	1	1	
	1	1	1	1	$p^0(1) = 0! \cdot 1 = 1$
1	—	1	2		
	1	2	3		$p^{(1)}(1) = 1! \cdot 1 = 3$
1	—	1			
	1	3			$p^{(2)}(1) = 2! \cdot 3 = 6$
1	—				
	1				$p^{(3)}(1) = 3! \cdot 1 = 6$
	a	b	c	d	

$$-a \quad +b \quad -c \quad +d \quad =$$

$$-1 \quad 3 \quad -3 \quad 1 \quad = 0 \quad ???$$

Kapitel I: Ausgewählte numerische Verfahren

$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$
 $p(x)$ ist Linearkombination von $1, x, \dots, x^n$
 $1, x, x^2, \dots$ bilden eine Basis von $\mathbb{K}[x]$

C Čebyšev-Polynome

Definition 1.5

Die durch die Polynome

$$\begin{aligned} T_0(x) &:= 1 \\ T_1(x) &:= x \\ T_{n+1}(x) &:= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

definierten Polynome T_n heißen **Čebyšev-Polynome erster Art**, und

$$\begin{aligned} U_0(x) &:= 1 \\ U_1(x) &:= 2x \\ U_{n+1}(x) &:= 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

heißen **Čebyšev-Polynome zweiter Art**.

Satz 1.6

$T_n(x)$ ist gleich

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k-1} \cdot x^{n-2k}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Beweis (Vollständige Induktion)

$$(n = 1) \quad \left[\frac{1}{2} \right] = 0 \quad T_1(x) = \binom{1}{0} \underset{=1}{\cdot} 2^0 \cdot x^1 \quad T_1(x) = x$$

Das Analogon zum Horn'schen Algorithmus für Polynome in der Čebyšev-Darstellung heißt **Clenshaw-Algorithmus**.

$$\begin{aligned} a_n^{(1)} &:= a_n \\ a_{n-1}^{(1)} &:= 2 \cdot \alpha a_n^{(1)} + a_{n-1} \\ a_{n-0}^{(1)} &:= 2 \cdot \alpha a_{n-\nu+1}^{(1)} + a_{n-\nu} - a_{n-\nu+2}^{(1)}, \quad \nu = 2, \dots, n-1 \\ a_0^{(1)} &:= \alpha \cdot a_1^{(1)} + a_0 - a_2^{(1)} \end{aligned}$$

Gegeben sei

$$p(x) = a_n \cdot T_n(x) + a_{n-1} \cdot T_{n-1}(x) + \dots + a_0 T_0(x)$$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_1	a_0
			$-a_n^{(1)}$	\dots	$-a_3^{(1)}$	$-a_2^{(1)}$
α	$2 \cdot \alpha \cdot a_n^{(1)}$	$2 \cdot \alpha \cdot a_{n-1}^{(1)}$	\dots	$2 \cdot \alpha \cdot a_2^{(1)}$	$\alpha \cdot a_1^{(1)}$	
	$a_n^{(1)}$	$a_{n-1}^{(1)}$	$a_{n-2}^{(1)}$	\dots	$a_1^{(1)}$	$p(x) = \boxed{a_0^{(1)}}$

Beispiel

$$5 \cdot T_6 + 2 \cdot T_5 + 3 \cdot T_4 - T_3 - 4 \cdot T_2 + T_1 - 10 \cdot T_0$$

	5	2	3	-1	-4	1	-10
$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{9}{8}$	$-\frac{1}{4}$		
	5	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{43}{8}$			

§ 2 Interpolation und Quadratur

Definition 2.1 (Algebraische Interpolation)

Gegeben seien $n+1$ viele paarweise verschiedene Punkte $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, die wir als **Stützstellen** oder **Knoten** bezeichnen, und $n+1$ viele Punkte $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ (die gleich sein können), die wir **Stützwerte** nennen.

Gesucht ist ein Polynom p von höchstens dem Grad n mit $p(x_k) = y_k, k = 0, \dots, n$.

Hinweis

Ohne die Forderung $\text{Grad}(p) \leq n$ ist die Interpolation gar nicht oder nicht eindeutig lösbar.

Beispiele

1. $p(1) = 1, p(-1) = 1, p(0) = 0$. $p \in \Pi_3^*$ – mehrdeutig lösbar
2. $p(1) = 1, p(\frac{1}{2}) = -1, p(-\frac{1}{2}) = 1, p(-1) = 1$: Keine Lösung in Π_2

Lemma 2.2

Das Interpolationsproblem 2.1 hat höchstens eine Lösung.

Beweis

Es seien p und q Lösungen. Sei $r := p - q$ und $\text{Grad}(r) \leq n$. r hat $n+1$ viele Nullstellen.

$$r(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = y_i - y_i = 0, \quad i = 0, \dots, n.$$

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat r höchstens n viele Nullstellen. Daraus folgt $r = 0$, also $p = q$. \square

A Existenzproblem des Interpolationsproblems 2.1

Definition 2.3

Gegeben seien Punkte $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, alle paarweise verschieden. Dann bezeichnet man die Polynome

$$l_\nu := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq \nu}}^n \frac{x - x_j}{x_\nu - x_j}, \quad \nu = 0, \dots, n$$

als die zu den Knoten x_0, \dots, x_n gehörenden **Lagrange-Grundpolynome**.

$$l_\nu(x) = \frac{x - x_1}{x_\nu - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_\nu - x_2} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_n}{x_\nu - x_n}$$

Klar:

1. $l_\nu \in \Pi_n$

* Π_n ist die Menge aller Polynome n -ten Grades.

$$2. \quad l_\nu(x_k) = \delta_{\nu k} = \begin{cases} 0 & : \nu \neq k \\ 1 & : \nu = k \end{cases}$$

Somit hat das Polynom $p \in \Pi_n$ mit

$$p(x) = \sum_{\nu=0}^n y_\nu \cdot l_\nu(x) \tag{2.1}$$

die Eigenschaft

$$p(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

Satz 2.4

Das Interpolationsproblem 2.1 hat genau eine Lösung, die sich mittels der Lagrange-Polynome in der Form

$$\sum_{\nu=0}^n y_\nu \cdot l_\nu(x)$$

darstellen lässt.

Beweis

Eindeutigkeit: Siehe Lemma 2.2 auf der vorherigen Seite; Existenz: Siehe vor Satz 2.4.

Bemerkung

In der Sprache der linearen Algebra kann Satz 2.4 auch so formuliert werden:

Gegeben seien feste Stützstellen x_0, \dots, x_n . Dann ist die Abbildung

$$L_n : \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \Pi_n, \quad L_n(\vec{y}) := \sum_{\nu=0}^n y_\nu l_\nu(x), \quad y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

ein Vektorraumisomorphismus.

Es gilt

$$L_n(\alpha \cdot \vec{y} + \beta \cdot \vec{y}') = \alpha \cdot L_n(\vec{y}) + \beta \cdot L_n(\vec{y}')$$

Hausaufgabe:

3. Man zeige

$$\det \begin{pmatrix} 1x_0^1 & \dots & x_0^2 \\ 1x_1^1 & \dots & x_1^2 \\ \vdots & & \vdots \\ 1x_n^1 & \dots & x_n^2 \end{pmatrix} = \prod_{k>j} (x_k - x_j)$$

(Vandermonde-Determinante)

4. Man schreibe das Polynom (2.1) in der Monomdarstellung.

Definition 2.5 (Newton-Grundpolynome)

$$u_0(x) := 1$$

$$u_\nu(x) := (x - x_{\nu-1}) \cdot u_{\nu-1}(x), \nu = 1, \dots, n$$

d. h.

$$u_\nu(x) = \prod_{\mu=1}^{\nu} (x - x_{\mu-1})$$

$$= (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{\nu-1})$$

Die Polynome u_ν heißen **Newton-Grundpolynome**.

Wir haben die Gleichungen:

$$\sum_{\nu=0}^n \alpha_\nu \cdot u_\nu(x_k) = y_k \quad u = 0, 1, \dots, n \tag{2.2}$$

Die zu (2.2) gehörende Matrix $(u_\nu(x_k))_{k,\nu=0,\dots,n}$ hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 & \cdots \\ \vdots & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & \\ \vdots & \vdots & (x_3 - x_0)(x_4 - x_1) & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & \end{pmatrix},$$

2000-11-22

ist also eine Dreiecksmatrix.

Gegeben seien die Punkte $P_0 = (x_0, y_0), \dots, P_n = (x_n, y_n)$, wobei $(x_i \neq x_j, i \neq j)$

Gesucht ist eine ökonomische Methode zur Berechnung der Koeffizienten $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ (für die Newtonschen Grundpolynome), so daß

$$\sum_{\nu=0}^n \alpha_\nu u_\nu(x)$$

das Interpolationspolynom für die Punkte P_0, \dots, P_n ist.

Wiederholung:

$$u_0(x) = 1$$

$$u_1(x) = (x - x_0)$$

$$u_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

$$\vdots$$

$$u_n(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

Idee: Für $P_0; P_0, P_1; P_0, P_1, P_2; \dots$ gibt es eindeutig bestimmte Interpolationspolynome p_0, p_1, \dots, p_n

$$\begin{aligned} p_0(x) &= a_0x^0 + \dots \\ p_1(x) &= a_1x^1 + \dots \\ p_2(x) &= a_2x^2 + \dots \\ &\vdots \\ p_n(x) &= a_nx^n + \dots \end{aligned}$$

Alle Zahlen a_0, \dots, a_n sind wohldefiniert (sie können auch gleich 0 sein).

Satz 2.6

Es gilt:

$$p_n(x) = a_0u_0 + a_1u_1 + \dots + a_nu_n \tag{2.3}$$

Also $\alpha_0 = a_0, \dots, \alpha_n = a_n$.

Beweis

Da in 2.6 nur $u_n(x)$ vom Grad n ist, ist α_n der Koeffizient vor x^n . Dies ist nach Definition aber a_n , also gilt $\alpha_n = a_n$.

Da $u_n(x_{n-1}) = 0$ ist, gilt $\alpha_0u_0 + \dots + \alpha_{n-1}u_{n-1}$ ist Interpolation für P_0, \dots, P_{n-1} . Wiederum ist $u_{n-1}(x)$ vom Grad $n - 1$, daher gilt $\alpha_{n-1} = a_{n-1}$. \square

Hinweis:

1. Wir sehen aus Satz 2.6 (also $a_i = \alpha_i$), daß mehr Stützpunkte die Anfangsdarstellung nicht beeinflussen.
2. $a_i = a_i(P_0, P_1, \dots, P_i)$ $i = 0, \dots, n$ heißen auch **Leitkoeffizienten** des Interpolationspolynoms der Punkte P_0, \dots, P_i

$$\begin{aligned} &P_i, \quad P_iP_{i+1}, \quad P_iP_{i+1}P_{i+2} \\ a_0(P_i), \quad a_1(P_iP_{i+1}), \quad a_2(P_iP_{i+1}P_{i+2}) \end{aligned}$$

Lemma 2.7 (Berechnungsmethode für a_0, a_1, \dots, a_n)

Die Werte

$$a_0(P_i), a_1(P_iP_{i+1}), a_2(P_iP_{i+1}P_{i+2})$$

haben die Eigenschaft

$$\begin{aligned} a_0(P_i) &= y_i, \quad i = 0, \dots, n \\ a_l(P_iP_{i+1} \dots P_{i+l}) &= \frac{a_{l-1}(P_{i+1} \dots P_{i+l}) - a_{l-1}(P_i \dots P_{i+l-1})}{x_{i+l} - x_i} \end{aligned}$$

Hieraus kann $a_j(P_0 \dots P_j)$ rekursiv berechnet werden.

Beweis

Es sei $p \in M_{l-1}$, das Interpolationspolynom der Punkte $P_i, P_{i+1}, \dots, P_{i+l-1}$ (l viele Punkte) und

Kapitel I: Ausgewählte numerische Verfahren

$q \in M_{l-1}$ der Punkte $P_{i+1}, P_{i+2}, \dots, P_{i+l}$. Die Leitkoeffizienten von p und q sind $a_{l-1}(P_i \dots P_{i+l-1})$ und $a_{l-1}(P_{i+1} \dots P_{i+l})$. Das Polynom $r \in M_l$ mit

$$r(x) := \frac{1}{x_{i+l} - x_i} \cdot \left[\underbrace{(x - x_i)q(x)}_{y_{i+l}} - \underbrace{(x - x_{i+l})p(x)}_0 \right], \quad x \in N \quad (2.4)$$

interpoliert die Punkte P_i, \dots, P_{i+l} . Der Leitkoeffizient für r ist

$$a_l(P_i \dots P_{i+l})$$

Aus (2.4) folgt

$$\frac{1}{x_{i+l} - x_i} \cdot (a_{l-1}(P_{i+1} \dots P_{i+l}) - a_{l-1}(P_i \dots P_{i+l-1}))$$

Definition 2.8 (dividierte Differenzen)

Zu den Stützpunkten $P_\nu = (x_\nu, y_\nu)$, $\nu = 0, 1, \dots, i$ heißt die Zahl $[P_0 P_1 \dots P_i]$ **dividierte Differenz** der Punkte $P_0 \dots P_i$ und ist wie folgt rekursiv definiert:

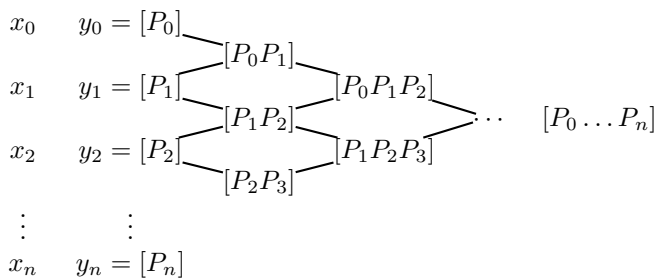
$$\begin{aligned} [P_\nu] &= y_\nu, \quad \nu = 0, \dots, i \\ [P_\nu] &= \frac{[P_{\nu+1} \dots P_{\nu+j}] - [P_\nu \dots P_{\nu+j-1}]}{x_{\nu+j} - x_\nu} \end{aligned}$$

Bemerkung 2.9

Da die Leitkoeffizienten $a_\nu(P_0 \dots P_\nu)$ und $[P_0 \dots P_\nu]$ der gleichen Rekursion genügen und die gleichen Anfangsbedingungen haben, erhalten wir

$$a_\nu(P_0 \dots P_\nu) = [P_0 \dots P_\nu]$$

Berechnung der dividierten Differenzen nach folgendem Schema:



Beispiel

$$P_0 = (1, 1) \quad P_1 = (2, 1) \quad P_2 = (3, 1) \quad P_3 = (-1, \frac{1}{2})$$

1. (LGS)

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$1 = a + b + c + d$$

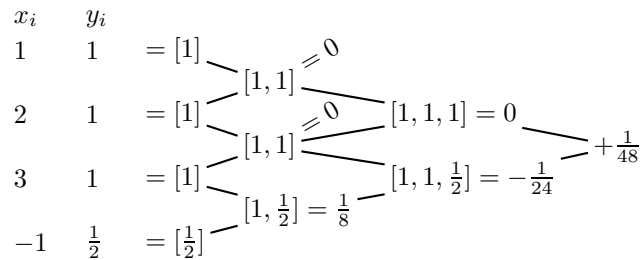
$$1 = 8a + 4b + 2c + d$$

$$1 = 27a + 9b + 3c + d$$

$$\frac{1}{2} = -a + b - c + d$$

$$p(x) = \frac{1}{48}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{11}{48}x + \frac{7}{8}$$

2. (Dividierte Differenzen)



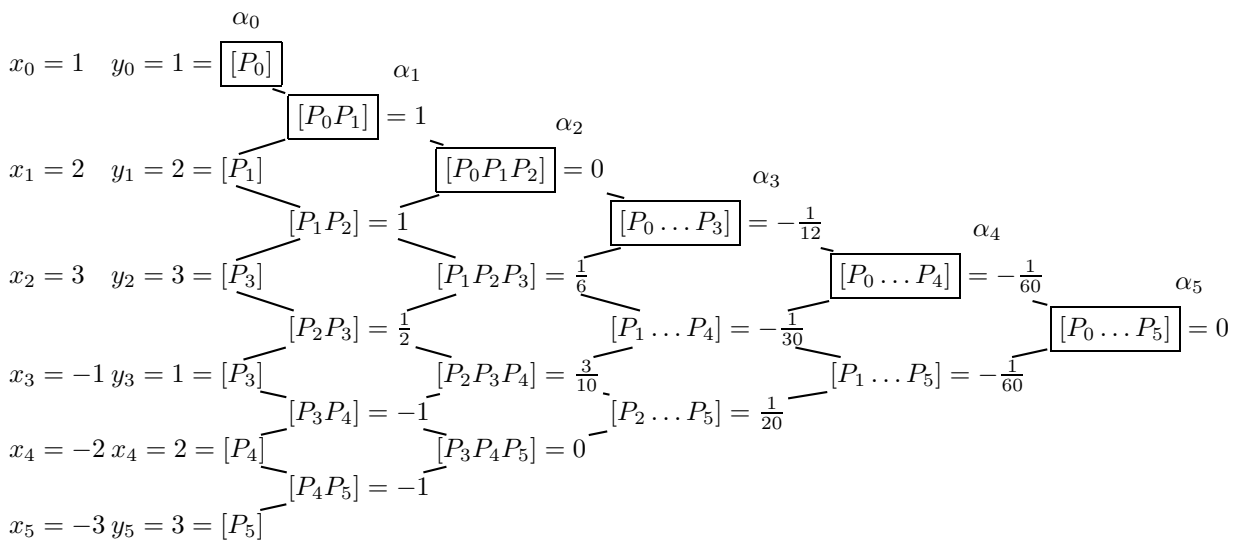
Also

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 \cdot u_0 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \frac{1}{48} \cdot u - 3 \\ &= 1 + \frac{1}{48}(x-1)(x-2)(x-3) \\ &= \frac{1}{48}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{11}{48}x + \frac{7}{8} \end{aligned}$$

2000-11-29

Beispiel

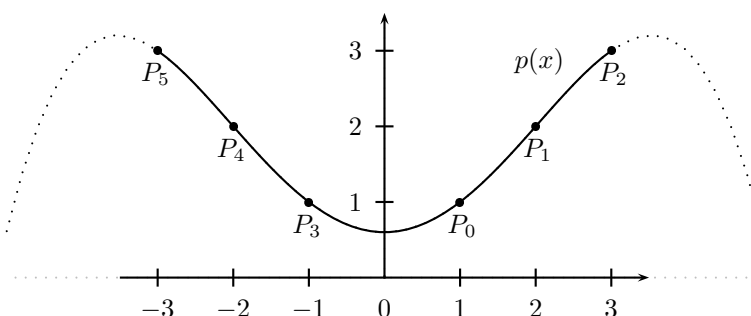
$P_0 = (1, 1), P_1 = (2, 2), P_2 = (3, 3), P_4 = (-2, 2), P_5 = (-3, 3)$



Kapitel I: Ausgewählte numerische Verfahren

Lösung mit den Newtonschen Grundpolynomen:

$$\begin{aligned}
 p(x) &= 1 \cdot u_0 + 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 - \frac{1}{12} \cdot u_3 - \frac{1}{60} \cdot u_4 + 0 \cdot u_5 \\
 &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (x-1) + 0 \cdot (x-1)(x-2) - \frac{1}{12} \cdot (x-1)(x-2)(x-3) - \\
 &\quad - \frac{1}{60} \cdot (x-1)(x-2)(x-3)(x+1) + 0 \cdot u_5(x) \\
 &= x - \frac{1}{60} \underbrace{(x-1)(x-2)(x-3)(5+(x+1))}_{x+6} \\
 &= \underline{\underline{x - \frac{1}{60}(x-1)(x-2)(x-3)(x+6)}}
 \end{aligned}$$



Hinweis

Wenn die Stützstellen x_ν **äquidistant** verteilt sind, d. h. falls $x_\nu = x_0 + \nu \cdot h$, $h > 0$, $\nu = 1, \dots, n$ gilt, dann können die Koeffizienten für die Newton-Grundpolynome leichter berechnet werden, nämlich mit den „**vorwärts genommenen Differenzen**“:

$$P_0 = (x_0, y_0), \dots, P_n = (x_n, y_n)$$

$$\Delta^0 y_i := y_i$$

$$\Delta^k y_i := \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i \quad (k \geq 1)$$

Es gilt

$$(i) [y_i \dots y_{i+k}] = \frac{1}{h^k \cdot k!} \Delta^k y_i$$

$$(ii) p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{h^k} \cdot \frac{\Delta^k y_0}{k!} \cdot \prod_{\nu=0}^{k-1} (x - x_0 - \nu \cdot h)$$

(P_0, \dots, P_n sind äquidistant verteilt)

Beweis

(i) (Induktion)

Induktionsanfang: $[y_i] = y_i = \Delta^0(y_i)$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
 [y_i \dots y_{i+k}] &= \frac{1}{h^k k!} \Delta^k Y_i = \frac{1}{h^k k!} (\Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i) \\
 &= \frac{1}{h^k k!} (h^{k-1} \cdot (k-1)! [y_{i+1} \dots y_k] - h^{k-1} (k-1)! [y_i \dots y_{i+k-1}]) \\
 &= \frac{1}{h^k} ([y_{i+1} \dots y_k] - [y_i \dots y_{i+k-1}]) \\
 &= \frac{[y_{i+1} \dots y_k] - [y_i \dots y_{i+k-1}]}{x_{i+1} - x_i}
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 p_n(x) &= \sum_{k=0}^n [y_0 \dots y_k] \cdot u_k(x) \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{h^k} \cdot \frac{\Delta^k(y_0)}{k!} \cdot u_k(x) \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{h^k} \cdot \frac{\Delta^k(y_0)}{k!} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{h^k} \cdot \frac{\Delta^k(y_0)}{k!} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_0 - i \cdot h) \quad \square
 \end{aligned}$$

§ 3 Quadratur mit Hilfe von Interpolation

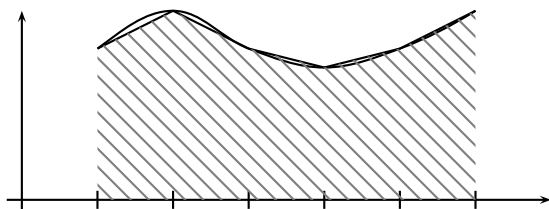
Bei der Quadratur mit Hilfe von Interpolation geht es darum, Näherungswerte für bestimmte Integrale zu berechnen.

Einfache Methode: Anwendung der Summendefinition von Riemann.

Gegeben sei die Zerlegung: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$.

$$I(f) := \int_a^b f(x) dx \sim \sum_{\nu=1}^m f(z_\nu) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}) \text{ mit } z_\nu \in [x_{\nu-1}, x_\nu]$$

Wahl der Punkte z_ν Mittelpunkt- oder Rechteck-Regel: $z_\nu = \frac{1}{2}(x_\nu + x_{\nu-1})$
 Trapez-Regel: Statt $f(z_\nu)$ nimmt man $\frac{1}{2}(f(x_\nu) + f(x_{\nu-1}))$



Spezialfall der Zerlegung ist die äquidistante Zerlegung:

$$x_\nu = a + \nu \cdot h, \quad h = \frac{b-a}{m}, \quad \nu = 0, \dots, m$$

Summierte Mittelpunktregel:

$$I(f) \sim \frac{b-a}{m} \sum_{\nu=1}^m f\left(a + \frac{2\nu-1}{2}h\right) \tag{3.1}$$

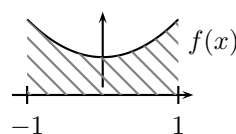
Summierte Trapezregel:

$$I(f) \sim \frac{b-a}{m} \left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{\nu=1}^{m-1} f(a + \nu h) + \frac{f(b)}{2} \right) \tag{3.2}$$

(3.1) ist eine offene Formel (d. h. $f(a)$ und $f(b)$ werden nicht beachtet). (3.2) ist eine geschlossene Formel (d. h. $f(a)$ und $f(b)$ werden beachtet).

Beispiel (*)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad a = -1, b = 1$$



2000-12-01

A Quadratur und Interpolation

Um eine Näherung von $I(f)$ zu erhalten, wählen wir $m+1$ verschiedene Stützstellen $x_\nu \in [a, b], \nu = 0, 1, \dots, m$.

Das Interpolationspolynom $p(x)$ für f und x_ν hat die Gestalt:

$$p(x) = \sum_{\nu=0}^m f(x_\nu) \cdot l_\nu(x)$$

und somit durch Integration von p erhalten wir eine Näherung von $\int_a^b f(x)dx$.

Es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{\nu=0}^m a_\nu \cdot f(x_\nu) + R_m(f) \tag{3.3}$$

mit

$$a_\nu = \int_a^b l_\nu(x)dx, \quad R_m(f) - \text{Restglied.}$$

(3.3) heißt **interpolatorische Quadraturformel**, die a_ν heißen **Gewichte**.

Es gilt:

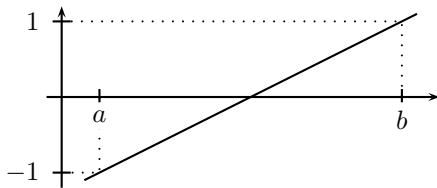
$$R_m(q) = 0 \text{ für alle } q \in \Pi_m.$$

(Klar, weil $q = p$. $q, p \in \Pi_m$ und stimmen an $m+1$ Stellen überein, dann gilt $p = q$.)

Die Betrachtungen sollen von $[a, b]$ auf $[-1, 1]$ übertragen werden (*normiert* werden). Dazu verwenden wir die (affine*) Transformation

$$x = \overbrace{\frac{1}{2}((b-a) \cdot t + (a+b))}^{x(t)}, t = \frac{1}{b-a} (2x - (a+b)) \quad \left(x'(t) = \frac{b-a}{2} \right)$$

$$t = -1 \curvearrowright x = a; t = 1 \curvearrowright x = b \quad [a, b] \rightarrow [-1, 1]$$



Die Knoten $x_\nu \in [a, b]$ werden transformiert zu den Knoten $t_\nu \in [-1, 1]$. Es seien \tilde{a}_ν die transformierten Gewichte, d.h.

$$\tilde{a}_\nu = \int_{-1}^1 \tilde{l}_\nu(t)dt.$$

Satz 3.1

Es gilt:

* Die bezeichnete Funktion ist unmöglich die, die er nebenan angemalt hat. Habe ich da was falsch abgeschrieben? Ich habe als Formel für die gezeichnete Funktion jetzt mal $x^2 + 1$ genommen. . . -tv
 * eine affine Transformation muss nicht, wie eine lineare, durch den Nullpunkt gehen

Kapitel I: Ausgewählte numerische Verfahren

$$(i) \quad l_\nu(x) = \tilde{l}_\nu \left(\frac{1}{b-a} (2x - a + b) \right)$$

$$(ii) \quad a_\nu = \frac{b-a}{2} \cdot \tilde{a}_\nu, \quad \nu = 0, \dots, n.$$

Beweis

(i)

$$l_\nu(x) = \prod_{\substack{\mu=0 \\ \mu \neq \nu}}^m \frac{x - x_\mu}{x_\nu - x_\mu}, \quad l_\nu(x) \stackrel{?}{=} \tilde{l}_\nu(t(x))$$

Beide sind Polynome vom Grad $\leq m$. Für $x = x_\nu$:

$$t(x_\nu) = t_\nu$$

$$l_\nu(\underbrace{t(x_\mu)}_{t_\mu}) = \tilde{l}_\nu(t_\nu) = \underbrace{\delta_{\nu\mu}}_{\text{Kronecker-Symbol}}$$

$$l_\nu(x_\mu) = \delta_{\nu\mu}.$$

Somit stimmen $l_\nu(x)$ und $\tilde{l}_\nu(t(x))$ in x_0 überein, also

$$l_\nu(x) = \tilde{l}_\nu(t(x)) = \underbrace{\tilde{l}_\nu \left(\frac{1}{b-a} (2x - (a+b)) \right)}_{t(x)}$$

(ii)

$$a_\nu = \int_a^b l_\nu(x) dx \stackrel{(i)}{=} \int_a^b \tilde{l}_\nu(t(x)) dx =$$

$$\int_{-1}^1 \tilde{l}_\nu(t(x(t))) \cdot x'(t) dt = \int_{-1}^1 \tilde{l}_\nu(t) \cdot \frac{b-a}{2} dt = \frac{b-a}{2} \cdot \tilde{a}_\nu$$

Beispiel

Stützstellen $t_0 = -1, t_1 = 0, t_2 = 1$

$$l_0(t) = \frac{1}{2} \cdot t \cdot (t-1)$$

$$l_1(t) = -(t-1)(t+1)$$

$$l_2(t) = \frac{1}{2} t(t+1) = l_0(-t)$$

$$l_2(-t) = \frac{1}{2} (-t)(-t+1) = +\frac{1}{2} t(t-1) = l_0(t)$$

Hieraus folgt:

$$a_0 = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} t(t-1) dt = \frac{1}{3}$$

$$a_1 = \frac{4}{3}$$

$$a_2 = \int_{-1}^1 l_2(t) dt = \int_{-1}^1 l_0(-t) dt \stackrel{z:=-t}{=} \int_1^{-1} \int_1^{-1} l_0(z) - (-1) dz \quad dt = -dz, -dz = dt$$

$$= - \int_1^{-1} l_0(z) dz = \int_{-1}^1 l_0(z) dz = \int_{-1}^1 l_0(t) dt = a_0$$

Somit gilt:

$$\int_{-1}^1 g(t) dt = \frac{1}{3} (a(-1) + 4 \cdot g(0) + g(1)) + R_2(g)$$

$$\int_a^b f(x) dt = \frac{b-a}{b} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) + R_2(f)$$

und

$$R_2(g) = R_2(f) = 0$$

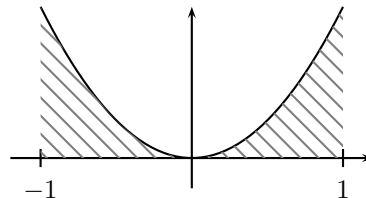
für alle Polynome vom Grad 2.

Beispiel

$$g(t) = t^2$$

$$\frac{1}{3}(1+1) = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^1 t^2 = \frac{1}{3}t^3 \Big|_{-1}^1$$



Hinweis: Wählt man $m + 1$ äquidistante Stützstellen

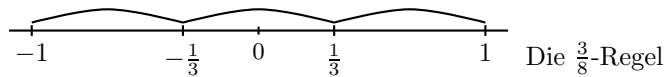
$$x_\nu = x_0 + \nu \cdot h, \nu = 0, \dots, m; h = \frac{b-a}{m},$$

dann erhält man die „summierte Simpson-Regel“ oder auch die „summierte Keplersche Faßregel“

$$\int_a^b f(x) dx \sim \frac{h}{3} \left[\frac{1}{2}f(a) + 2 \cdot \sum_{\nu=1}^m f\left(\frac{x_{\nu-1} + x_\nu}{2}\right) + \sum_{\nu=1}^{m-1} f(x_\nu) + \frac{1}{2}f(b) \right], \quad h = \frac{b-a}{m}$$

Aufgabe:

$$t_0 = -1, t_1 = -\frac{1}{3}, t_2 = \frac{1}{3}, t_3 = 1$$



§ 4 Bernstein-Polynome und Bezier-Darstellung eines Polynoms

$$1 = 1^n = (x + (1 - x))^n = \sum_{\nu=0}^n \underbrace{\binom{n}{\nu} x^\nu \cdot (1 - x)^{n-\nu}}_{b_{\nu n}}, \quad n \in \mathbb{N}^0, 0 \leq \nu \leq n$$

[allg. Form: $(n + b)^n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu}$]

Definition 4.1

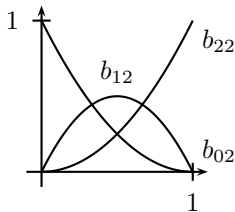
Die Funktionen

$$b_{\nu n} := \binom{n}{\nu} x^\nu \cdot (1 - x)^{n-\nu}$$

heißen **Bernstein-Polynome** vom Grad n , $n \in \mathbb{N}^0$, $0 \leq \nu \leq n$.

[Hinweis: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$]

Für $n = 2$:



2000-12-06

Satz 4.2

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $0 \leq \nu \leq n$ gilt

- (1) $b_{\nu n}$ hat eine ν -fache Nullstelle in 0
- (2) $b_{\nu n}$ hat eine $n - \nu$ -fache Nullstelle in 1
- (3) $b_{\nu n}$ ist echt positiv in $(0, 1)$ und hat ein lokales Maximum in $(0, 1)$ im Punkt $\frac{\nu}{n}$.
- (4) Die Polynome $b_{\nu n}, \nu = 0, \dots, n$ sind linear unabhängig, bilden somit eine Basis von Π_n .

Beweis

Beispiel: $p(x) = (x + 1)^3(x - 2)^2$: -1 ist dreifache, 2 ist zweifache Nullstelle

- (1) und
- (2) sind offensichtlich
- (3) $b_{\nu n} > 0$ für $x \in (0, 1)$ folgt sofort aus der Definition

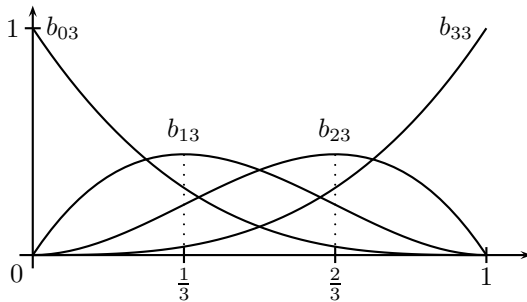
$$b'_{\nu n}(t) = \begin{cases} -n(1-t)^{n-1} & : \nu = 0 \\ nt^{n-1} & : \nu = n \\ \binom{\nu}{n} t^{\nu-1} (1-t)^{n-\nu-1} (\nu - nt) & : 0 < \nu < n \end{cases}$$

Für $\nu = 0$ ist b_{0n} monoton fallend (weil $b'_{0n} < 0$), also in $t = 0$ Maximum. Ähnlich hat b_{nn} in $t = 1$ ein Maximum.

Für $0 < \nu < n$ gilt $b'_{\nu n}(t) = 0$ für $t = 0, t = 1$ und $\nu - nt = 0$. Da $b_{\nu n}(t) > 0, t \in (0, 1)$ ist $b_{\nu n}(0) = b_{\nu n}(1) = 0$. Somit hat $b_{\nu n}$ in 0 und 1 ein Minimum und in $t = \frac{\nu}{n}$ ein Maximum.

- (4) Es gilt $b_{\nu n}(t)$ hat die Gestalt $q(t) \cdot t^\nu$ mit $q(0) = \binom{n}{\nu} \neq 0$. Gegeben $\sum_{\nu=0}^n \alpha_\nu \cdot b_{\nu n}(t) = 0$.
 $\alpha_0 \cdot q_0 \cdot t^0 + \alpha_1 \cdot q_1 \cdot t^1 + \alpha_2 \cdot q_2 \cdot t^2 + \dots + \alpha_n \cdot q_n \cdot t^n$

Für $t = 0 \curvearrowright \alpha_0 = 0 \curvearrowright \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ □



A Nützliche Eigenschaften der Bernstein-Polynome

Satz 4.3

- (1) $\sum_{\nu=0}^n b_{\nu n}(t) = 1$ für alle t und $n \in \mathbb{N}^0$
 (2) $\sum_{\nu=0}^n \frac{\nu}{n} \cdot b_{\nu n}(t) = t$ für alle t und $n \in \mathbb{N}$

Beweis

- (1) klar: $1 = 1^n = (xt(1-x))^n = \sum b_{\nu n}$
 (2) Für $n \geq 1$ und $\nu \geq 1$ gilt:

$$\frac{\nu}{n} \cdot \binom{n}{\nu} = \frac{\nu \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-\nu+1)}{n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (\nu-1) \cdot \nu} = \binom{n-1}{\nu-1}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^n \frac{\nu}{n} b_{\nu n}(t) &= \sum_{\nu=0}^n \frac{\nu}{n} \cdot \binom{n}{\nu} t^\nu \cdot (1-t)^{n-\nu} \\ &= \sum_{\nu=1}^n \frac{\nu}{n} \binom{n}{\nu} t^\nu (1-t)^{n-\nu} \\ &= t \underbrace{\sum_{\nu=1}^n \binom{n-1}{\nu-1} t^{\nu-1} (1-t)^{(n-1)-(\nu-1)}}_{=t \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} t^\nu (1-t)^{n-1-\nu}} = t \cdot \underbrace{\sum_{\nu=0}^{n-1} b_{\nu n-1}}_{=1} \\ &= t, \text{ unter Verwendung von (1) für } n-1 \end{aligned}$$

□

B Differentiation der Bernstein-Polynome

$$\begin{aligned}
 \text{Für } b'_{\nu n} &= \binom{n}{\nu} [\nu t^{\nu-1}(1-t)^{n-\nu} - (n-\nu)(1-t)^{n-\nu-1} \cdot t^0] \\
 \binom{n}{\nu} \cdot \nu &= \binom{n-1}{\nu-1} \cdot n \\
 \binom{n}{\nu} \cdot (n-\nu) &= n \cdot \binom{n-1}{\nu} \\
 b'_{\nu n} &= n \cdot \binom{n-1}{\nu-1} t^{\nu-1}(1-t)^{(n-1)-(\nu-1)} - n \frac{n-1}{\nu} t^{\nu} \cdot (1-t)^{n-1-\nu} \\
 &= n \cdot b_{\nu-1, n-1} - n \cdot b_{\nu, n-1} \\
 &= n(b_{\nu-1, n-1} - b_{\nu, n-1}) \\
 b'_{0n} &= -nb_{0, n-1} \\
 b'_{nn} &= nb_{n-1, n-1}
 \end{aligned}$$

Setze $b_{lk} := 0$ (Nullpolynom) für $l < 0$ oder $l > k$, dann gilt einheitlich für $0 \leq \nu \leq n, n \in \mathbb{N}^0$:

Satz 4.4

$$b_{\nu n}^{(k)}(t) = \prod_{j=0}^{k-1} (n-j) \cdot \sum_{\mu=0}^k (-1)^\mu \binom{k}{\mu} \cdot b_{\nu-k+\mu, n-k}(t)$$

wobei $b_{\nu-k+\mu, n-k} = 0$, wenn $\nu - k + \mu < 0$ oder $\nu - k + \mu > n - k$.

Beweis

Durch Iteration der Ableitungsbildung zuvor.

Definition 4.5

(i) Ist $p \in \Pi_n$, dann heißt

$$p(x) = \sum_{\nu=0}^n \beta_\nu \cdot b_{\nu n}(x)$$

die **Bezier-Darstellung von p** . Die Koeffizienten β_ν heißen **Bezier-Koeffizienten für p** .

(ii) Die Punkte $(\frac{\nu}{n}; \beta_\nu); \nu = 0, \dots, n$ heißen **Bezier-Punkte**.

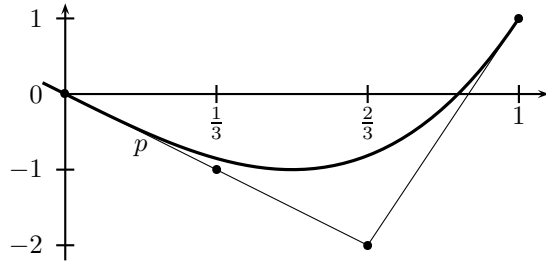
(iii) Das **Bezier-Polygon** ist die Funktion, die man durch geradliniges Verbinden der Bezier-Punkte erhält.

Da $b_{0n}(0) = 1 = b_{nn}(1)$, liegen im Allgemeinen nur $(\frac{0}{\beta_0})$ und $(\frac{1}{\beta_n})$ auf dem Graphen des Polynoms p .

Aufgabe 1: $p(t) = 4t^3 - 3t$

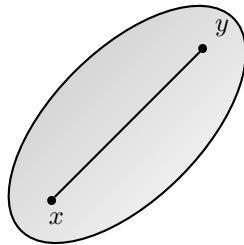
$$p = \beta_0 \cdot b_{02} + \beta_1 \cdot b_{13} + \beta_2 \cdot b_{23} + \beta_3 \cdot b_{33}$$

$$b_0 = 0, \beta_1 = -1, \beta_2 = -2, \beta_3 = 1$$

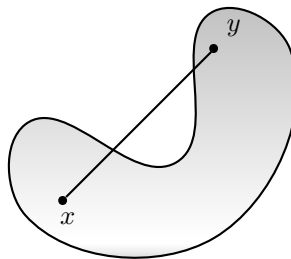


Definition 4.6

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn für alle $x, y \in K$ $z(\lambda) := (1 - \lambda)x + \lambda y$ für alle $\lambda \in [0, 1]$ auch zu k gehört.



konvex



nicht konvex

2000-12-13

Nachtrag:

1. Ist $p(x)$ ein Polynom auf $[a, b]$ Null, mit $a < b$, dann ist $p = 0$ (Nullpolynom).

Beweis

α ist Nullstelle von p , dann gilt:

$$p(x) = (x - \alpha)p'(x)$$

p ist Polynom, somit gilt: $\text{Grad}(p) = n, n \in \mathbb{N}$.

Es seien $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ Zahlen aus $[a, b]$. Es gilt:

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n+1}) \cdot p' \Rightarrow \text{Grad}(p) \geq n + 1 \quad \text{Widerspruch}$$

\Rightarrow Somit ist p' das Nullpolynom und somit auch $p(x)$. □

2. $b_{0n}, b_{1n}, \dots, b_{nn}$ sind linear unabhängig. Gegeben:

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \cdot b_{in} = 0$$

Z.z.: alle $\alpha_i = 0$

$$b_{\nu n}(x) := \binom{n}{\nu} x^\nu \cdot (1 - x)^{n-\nu}$$

Kapitel I: Ausgewählte numerische Verfahren

$$\begin{aligned}
 b_{0n} &= 1 + x^1 \cdot * + x^2 \cdot * + \dots + x^n \cdot * \\
 b_{1n} &= x^1 \cdot * + x^2 \cdot * + \dots + x^n \cdot * \\
 b_{2n} &= x^2 \cdot * + \dots + x^n \cdot * \\
 &\vdots \\
 b_{nn} &= x^n \cdot *
 \end{aligned}$$

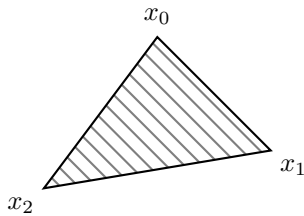
(* steht für einen beliebigen Faktor)

$$\begin{aligned}
 0 &= \alpha_0 b_{0n} + \alpha_1 b_{1n} + \dots + \alpha_n b_{nn} \\
 &= \alpha_0 \cdot 1 + (\alpha_0 \cdot * + \alpha_1 \cdot *)x^1 + (\alpha_0 \cdot * + \alpha_1 \cdot * + \alpha_2 \cdot *)x^2 + \dots \\
 \Rightarrow \alpha_0 &= 0 \quad \alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 0 \quad \dots \quad \alpha_n = 0 \\
 \Rightarrow \text{alle } \alpha_i &= 0
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 b'_{\nu n}(t) &= n(b_{\nu-1n-1}(t) - b_{\nu n-1}(t)) \\
 b'_{0n}(t) &= n(\underbrace{b_{-1n-1}(t)}_{=0} - b_{0n-1}(t)) \\
 b'_{nn}(t) &= n(b_{n-1n-1}(t) - \underbrace{b_{nn-1}(t)}_{=0}) \\
 b_{\nu n}^{(k)}(t) &= n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \cdot \sum_{\mu=0}^k (-1)^\mu \binom{k}{\mu} b_{\nu-k+\mu n-k}
 \end{aligned}$$

Dreiecke sind konvexe Mengen.



Jeden Punkt x des Dreiecks $\Delta_{x_0 x_1 x_2}$ kann man als Konvexkombination der Eckpunkte x_0, x_1, x_2 darstellen, d.h.

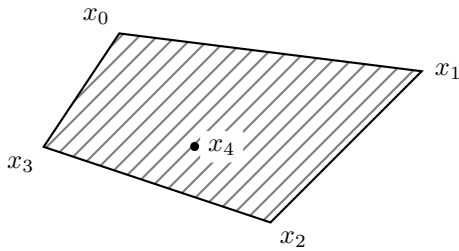
$$\begin{aligned}
 x_0 &= \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^2 \lambda_i = 1 \\
 x &= \lambda x_2 + (1-\lambda) \cdot z, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \\
 z &= \mu x_0 + (1-\mu) \cdot x_1, \quad 0 \leq \mu \leq 1 \\
 \Rightarrow x &= \lambda x_2 + (1-\lambda) \cdot (\mu x_0 + (1-\mu)x_1) \\
 &= \lambda x_2 + (1-\lambda)\mu x_0 + (1-\lambda)(1-\mu)x_1 \\
 1 &= \lambda + \mu - \lambda\mu + 1 - \lambda - \mu + \lambda\mu
 \end{aligned}$$

Definition 4.7 (konvexe Hülle)

Gegeben seien $x_0, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$. Die konvexe Hülle (dieser Punkte) ist die Menge

$$\text{conv}(x_0, \dots, x_m) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^m \lambda_i \cdot x_i ; \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1\}$$

Beispiel



x_4 trägt nichts zur konvexen Hülle bei, d.h.

$$\text{conv}(x_0, \dots, x_4) = \text{conv}(x_0, \dots, x_3)$$

Aufgabe

$\text{conv}(x_0, \dots, x_m)$ ist konvexe Menge.

Für ein Polynom p in seiner Bezier- Darstellung, d.h.

$$p = \sum_{\nu=0}^n p_{\nu} \cdot b_{\nu n}$$

kann man für $t \in [0, 1]$ den Punkt $\begin{pmatrix} t \\ p(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ angeben. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} t \\ p(t) \end{pmatrix} =_{4.2.2} \begin{pmatrix} \sum_{\nu=0}^n \frac{\nu}{n} \cdot b_{\nu n}(t) \\ \sum_{\nu=0}^n \beta_{\nu} \cdot b_{\nu n}(t) \end{pmatrix}$$

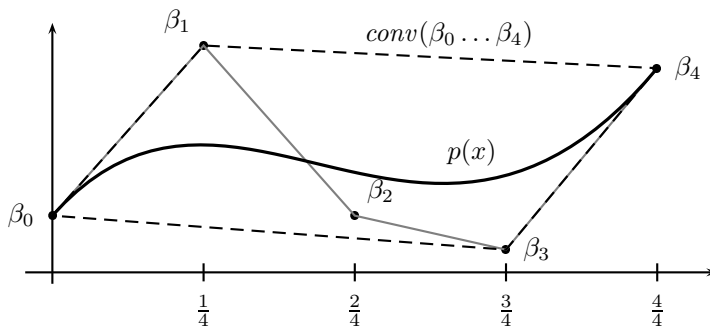
$$\sum_{\nu=0}^n b_{\nu n}(t) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\nu}{n} \\ \beta_{\nu} \end{pmatrix} \quad \dots \beta_{\nu} \dots \text{ sind Bezierpunkte}$$

Da $b_{\nu n}(t) \geq 0$ und $\sum_{\nu=0}^n b_{\nu n}(t) = 1$.

Satz 4.8

Für $t \in [0, 1]$ ist $\begin{pmatrix} t \\ p(t) \end{pmatrix}$ (ein Punkt des Graphen von p) Konvexkombination der Bezierpunkte

$\begin{pmatrix} \frac{\nu}{n} \\ \beta_{\nu} \end{pmatrix}$ mit $\nu = 0, \dots, n$.



(D. h. das Polynom verläuft innerhalb der konvexen Hülle der Bezierpunkte.)

Satz 4.9

Für die Bezierdarstellung $p = \sum_{\nu=0}^n \beta_{\nu} \cdot b_{\nu n}$ eines Polynoms $p \in \Pi_n$ gilt die Differentiationsformel:

$$\begin{aligned}
 p^{(k)}(t) &= n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \cdot \sum_{\nu=0}^{n-k} \Delta^k \beta_{\nu} \cdot b_{\nu n-k}(t) \\
 p^{(k)}(0) &= n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \cdot \Delta^k \beta_0 \cdot \underbrace{b_{0 n-k}(t)}_{=1} \\
 p^{(k)}(1) &= n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \cdot \Delta^k \beta_{n-k}
 \end{aligned}$$

Δ^k steht für ‚vorwärtsgenommene Differenz‘

Beweis

durch vollständige Induktion

Bemerkung 4.10

Wegen

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \sum_{\nu=0}^n \frac{p^{(\nu)}(0)}{\nu!} \cdot t^{\nu} \\
 &= \sum_{\nu=0}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{\nu!} \cdot \Delta^{\nu} \beta_0 t^{\nu} \\
 p(t) &= \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \Delta^{\nu} \beta_{\nu} \cdot t^{\nu}
 \end{aligned}$$

2000-12-15

C Algorithmus von de Casteljau

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \sum_{\nu=0}^n \beta_{\nu} \cdot b_{\nu n} \\
 p(t_0) &=?
 \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 b_{0\nu}(t) &= (1-t)b_{0 n-1}(t) \\
 b_{\nu n}(t) &= (1-t)b_{\nu n-1}(t) + t \cdot b_{\nu-1 n-1}(t) \quad (0 < \nu < n) \\
 b_{nn}(t) &= t \cdot b_{n-1 n-1}(t)
 \end{aligned}$$

$$p = \beta_0 b_{0n} + \beta_1 b_{1n} + \dots + \beta_n b_{nn}$$

$$p = [\beta_0 \cdot (1-t) + \beta_1 \cdot t] \cdot b_{0 n-1}(t) + \overbrace{[\beta_1(1-t) + \beta_1 t]}^{\text{z. B. } \beta_1^{(1)}} + \dots + [\beta_{n-1}(1-t) + \beta_n t] b_{n-1 n-1}(t)$$

Definiert man nun (die von t abhängigen) Koeffizienten $\beta_{\nu}^{(1)}$ durch

$$\beta_{\nu}^{(1)} := \beta_{\nu} \cdot (1-t) + \beta_{\nu+1} \cdot t \quad \nu = 0, \dots, n-1,$$

dann gilt

$$p(t) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \beta_{\nu}^{(1)} \cdot b_{\nu, n-1}(t).$$

Durch Iteration erhält man dann $\beta_0^{(n)}$ ($= p(t)$).

Satz 4.11

Ein Polynom in der Bezier-Darstellung

$$p = \sum_{\nu=0}^n \beta_{\nu} \cdot b_{\nu n}$$

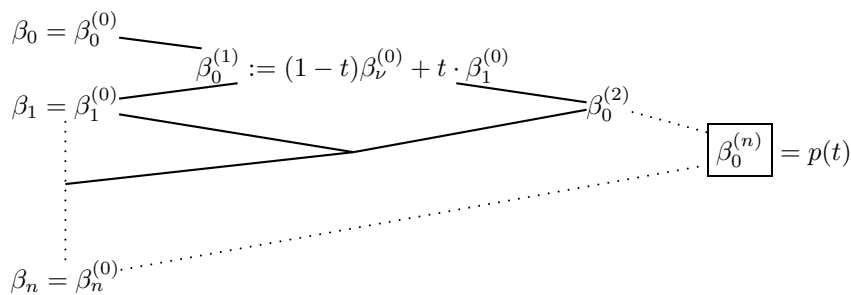
lässt sich an der Stelle t auswerten (berechnen) mit Hilfe der Rekursion

$$\begin{aligned} \beta_{\nu}^{(0)} &:= \beta_{\nu} & \nu &= 0, 1, \dots, n \\ \beta_{\nu}^{(k)} &:= (1-t) \cdot \beta_{\nu}^{(k-1)} + t \cdot \beta_{\nu+1}^{(k-1)} & \nu &= 0, 1, \dots, n-k \end{aligned}$$

Es gilt:

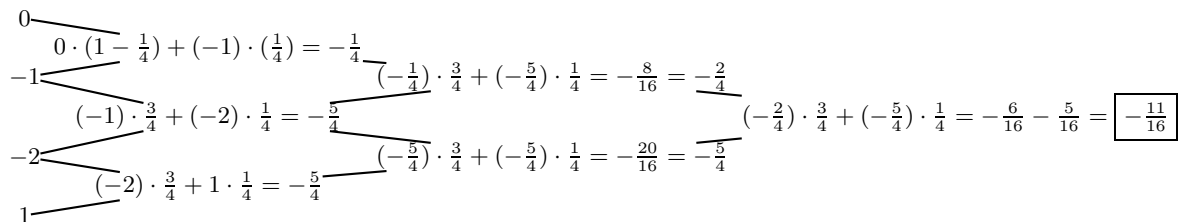
$$p(t) = \beta_0^{(n)} \quad k = 1, \dots, n$$

Schema der de Casteljaeu-Rekursion



Beispiel

Man werte das Polynom p mit den Bezier-Koeffizienten $b_0 = 0, \beta_1 = -1, \beta_2 = -2, \beta_3 = 1$ an der Stelle $t = \frac{1}{4}$ aus.



D Geometrische Deutung des de Casteljau-Algorithmus

Gegeben seien die Bezier-Koeffizienten $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$. Daraus folgen die Knotenpunkte des Bezier-Polygons:

$$(0, \beta_0), \left(\frac{1}{n}, \beta_1\right), \left(\frac{2}{n}, \beta_2\right), \dots, \left(\frac{n}{n}, \beta_n\right).$$

Sei $t \in [0, 1]$. Wir wissen

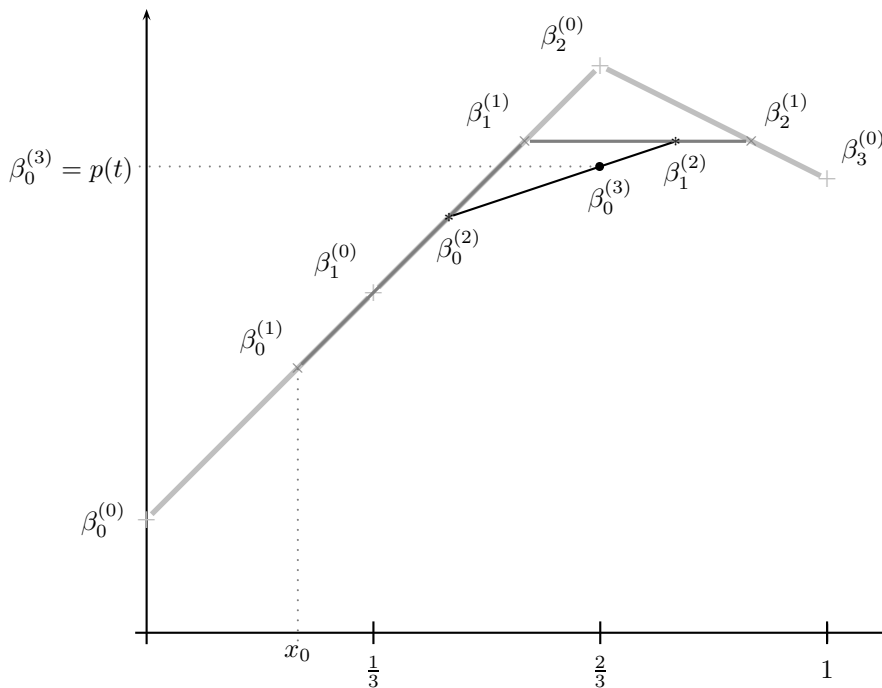
$$\beta_\nu^{(n)} = (1-t) \cdot \beta_\nu^{(k-1)} + t \cdot \beta_{\nu+1}^{(k-1)}.$$

Seien

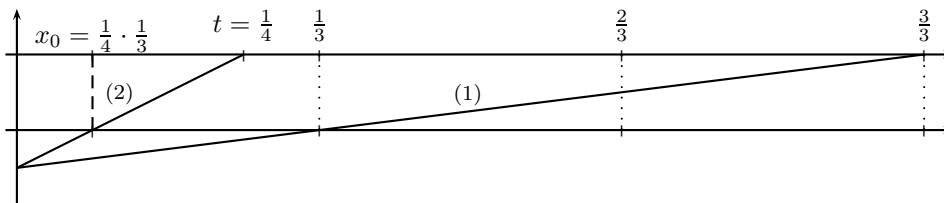
$$x_\nu := (1-t) \cdot \frac{\nu}{n} + \frac{\nu+1}{n} = \frac{\nu+t}{n}$$

$$y_\nu := (1-t)\beta_\nu^{(0)} + t \cdot \beta_{\nu+1}^{(0)} \quad (= \beta_0^{(1)}).$$

Beispiel zur grafischen Auswertung:*



Verfahren: Zur Bestimmung von $\beta_\nu^{(1)}$, $\nu = 0, \dots, n-1$ bestimmen wir zunächst die x_ν (nach obiger Formel). Das kann auch grafisch erfolgen. Am obigen Beispiel mit $n = 3$ und $t = \frac{1}{4}$ für x_0 :



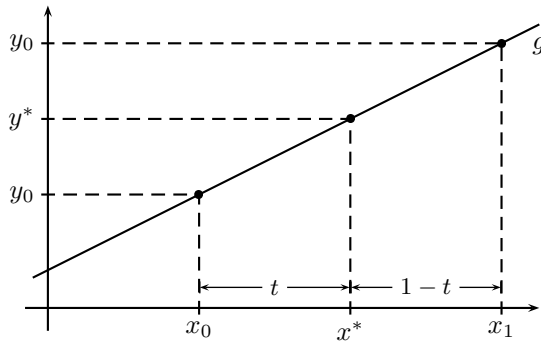
* Das Bild verwendet vorgegebene $\beta_\nu^{(0)}$, $n = 3$ sowie $t = \frac{2}{3}$. Bei den Beschriftungen der Punkte im Bild wurde nur die eigentlich interessante y -Koordinate angegeben (nämlich eben $\beta_\nu^{(k)}$).

Zeichne eine Gerade von 1 auf der oberen durch $\frac{1}{n}$ auf der unteren x -Achse (1) und verbinde deren Schnittpunkt mit der y -Achse mit t auf der oberen x -Achse (2). Der Schnittpunkt der zweiten Gerade mit der unteren x -Achse ist $x_0 = \frac{1}{n} \cdot t$. $x_\nu = x_0 + \frac{\nu}{n}$ für $1 < \nu \leq n$.

Mit Hilfe der x_ν kann man nun die $\beta_\nu^{(1)}$ bestimmen: Diese sind die y -Koordinaten des Bezier-Polynoms durch $\beta_0^{(0)}, \dots, \beta_{n-1}^{(0)}$ an den Stellen x_0, \dots, x_{n-1} .

Dieses Verfahren iteriert man nun: Anhand des Bezier-Polynoms durch die $\beta_\nu^{(1)}$ bestimmt man $\beta_\nu^{(2)}$ usw. $\beta_0^{(n)}$ beendet die Rekursion und stellt den Wert des Bezier-Polynoms an der Stelle t dar.

Nachweis der Korrektheit



$$g := y_1 - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

$$x^* = x_0 + t \cdot (x_1 - x_0)$$

$$y^* := y_0 + t \cdot (y_1 - y_0)$$

Zu zeigen: y^* liegt auf g :

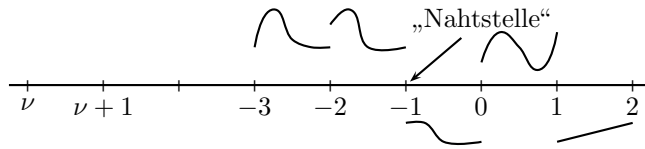
$$y_0 + t(y_1 - y_0) - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x_0 + t(x_1 - x_0) - x_0)$$

$$t \cdot (y_1 - y_0) = t(y_1 - y_0) \implies (x^*, y^*) \in g$$

§ 5 Stückweise polynomiale Funktionen

2000-12-20

Funktionen, die stückweise aus Polynomen zusammengesetzt sind, spielen in der Numerik eine große Rolle. Wir betrachten eine Funktion s , die auf \mathbb{R} definiert ist und auf den Intervallen $\nu, \nu + 1, \nu \in \mathbb{Z}$ jeweils ein Polynom p_ν vom Grad m ist.



Mittels der Variablentransformation $t \rightarrow t + \nu$ kann jedes p_ν für $t \in [\nu, \nu + 1)$ dargestellt werden als

$$p_\nu(t) = \sum_{\mu=0}^m \beta_{\mu\nu} \cdot b_{\mu m}(t - \nu).$$

Jedes p_ν hat die Bezierkoeffizienten $\beta_{0\nu}, \beta_{1\nu}, \dots, \beta_{m\nu}$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} p_{\nu-1}(\nu) &= \sum_{\mu=0}^m \beta_{\mu\nu-1} b_{\mu m}(\underbrace{\nu - \nu + 1}_1) \\ &= \beta_{m\nu-1} \\ p_\nu(\nu) &= \sum_{\mu=0}^m \beta_{\mu\nu} \cdot b_{\mu m}(\underbrace{\nu - \nu}_0) \\ &= \beta_{0\nu} \end{aligned}$$

Somit ist s an der Stelle ν stetig genau dann, wenn gilt:

$$\beta_{m\nu-1} = \beta_{0\nu}$$

Allgemein:

$$\begin{aligned} p_{\nu-1}^{(k)}(\nu) &= m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-k+1) \cdot \Delta^k \beta_{m-k\nu-1} \\ p_\nu^{(k)}(\nu) &= m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-k+1) \cdot \Delta^k \beta_{0\nu} \end{aligned}$$

Also ist S r -mal differenzierbar in ν genau dann, wenn

$$\Delta^\rho \beta_{m-\rho\nu-1} = \Delta^\rho \beta_{0\nu} \quad \text{für alle } \rho = 0, 1, \dots, r$$

Satz 5.1

Eine stückweise polynomiale zusammengesetzte Funktion s mit

$$s(t) := \begin{cases} \sum_{\mu=0}^m \beta_{\mu-1} \cdot b_{\mu m}(t+1) & : t \in [-1, 0) \\ \sum_{\mu=0}^m \beta_{\mu 0} \cdot b_{\mu m}(t) & : t \in [0, 1) \\ \sum_{\mu=0}^m \beta_{\mu 1} \cdot b_{\mu m}(t-1) & : t \in [1, 2) \\ \vdots & \end{cases}$$

ist r -mal stetig differenzierbar auf \mathbb{R} genau dann, wenn

$$\Delta^\rho \beta_{m-\rho\nu-1} = \Delta^\rho \beta_{0\nu}, \quad \rho = 0, 1, \dots, r, \nu \in \mathbb{Z}$$

Hinweis

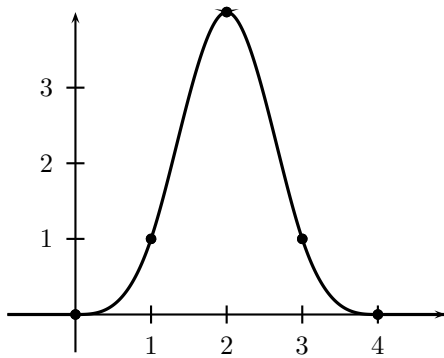
Von praktischem Interesse sind s mit „kompaktem Träger“, d. h. es gilt:

$$\nu_0, \nu_1 \in \mathbb{Z}, \nu_0 < \nu_1 \quad x \notin [\nu_0, \nu_1] \Rightarrow s(x) = 0$$

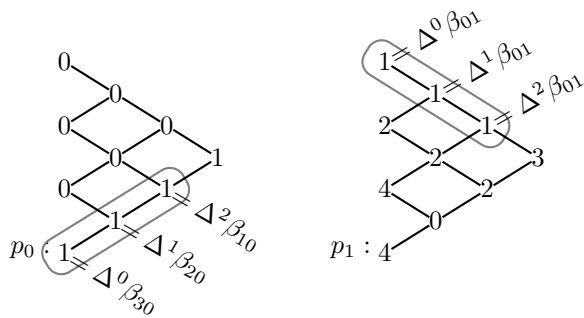
Beispiel

Seien $m := 3$, s definiert durch

$$s := \begin{cases} b_{33}(t) & : t \in [0, 1) \\ b_{03}(t-1) + 2b_{13}(t-1) + 4 \cdot b_{23}(t-1) + 4b_{33}(t-1) & : t \in [1, 2) \\ 4 \cdot b_{03}(t-2) + 4 \cdot b_{13}(t-2) + 2b_{23}(t-2) + b_{32}(t-2) & : t \in [2, 3) \\ b_{03}(t-3) & : t \in [3, 4) \\ 0 & : t \notin [0, 4) \end{cases}$$

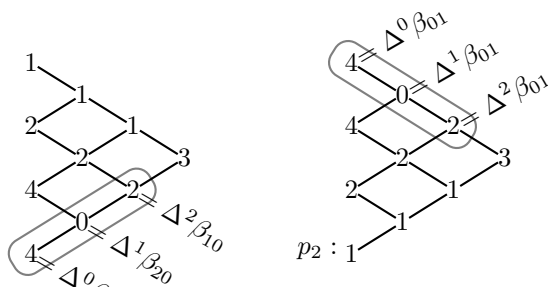


Für $t = 1$:



\Rightarrow 2mal stetig differenzierbar

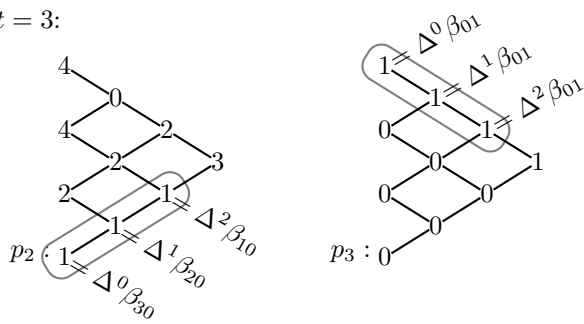
Für $t = 2$:



\Rightarrow 2mal stetig differenzierbar

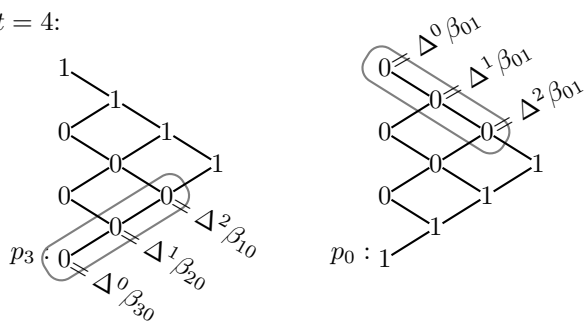
Kapitel I: Ausgewählte numerische Verfahren

Für $t = 3$:



\implies 2mal stetig differenzierbar

Für $t = 4$:



\implies 2mal stetig differenzierbar

Für $t = 0$ analog.

Also ist die gesamte Funktion zweimal stetig differenzierbar.

Kapitel II

Wahrscheinlichkeitsrechnung

§ 1 Abzählmethoden

2001-01-10

A Fundamentales Abzählprinzip

Kann ein Vorgang auf n_1 verschiedene Arten ausgeführt werden, danach ein weiterer auf n_2 verschiedene Arten, dem folgend ein dritter auf n_3 verschiedene Möglichkeiten und so weiter, dann gibt es $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots$ verschiedene Möglichkeiten für die Ausführung des Gesamtvorgangs.

Definition 1.1

Gegeben sei eine Menge M mit n vielen Elementen und $r \leq n$. Eine **r -Permutation** (von M) ist eine Anordnung von r -vielen Elementen aus M . (Mathematisch: eine $1 - 1^*$ Funktion von $\{1, \dots, r\}$ in M).

Für $|M|$ -Permutation[†] von M sage nur **Permutation von M** .

Beispiele

$$M = \{a, b, c, d\}$$

- i) $bdca$ 4-Permutation = Permutation
- ii) bad 3-Permutation
- iii) ad 2-Permutation
- iv) c 1-Permutation

Mit $P(n, r)$ bezeichnen wir die Anzahl der r -Permutationen von n Objekten.

Satz 1.2

$$P(n, r) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - r + 1)$$

*ohne Wiederholung

†gesamte Menge

Beweis

$$\text{FAbP}^* = \frac{n!}{(n-r)!} = r! \binom{n}{r}$$

Korollar 1.3

$$P(n, n) = n!$$

Definition 1.4

Permutationen von Objekten, die nicht alle verschieden sind heißen **Permutationen mit Wiederholungen**.

Beispiele

EBER, REBE

Satz 1.5

Die Anzahl der Permutationen von n Objekten, von denen je n_1 , je n_2 , je n_3, \dots , je n_r viele gleich sind, ist gleich:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}$$

Beispiele

4 rote, 3 weiße, 1 blaue Fahne

$$\frac{8!}{4! \cdot 3! \cdot 1!} = 280$$

Definition 1.6

Das Entnehmen von Elementen aus einer Menge (von verschiedenen Elementen) heißt **geordnete Stichprobe**.

Entnehmen wir r viele Elemente, dann sprechen wir von einer **geordneten Stichprobe vom Umfang r** .

Dabei gibt es 2 Möglichkeiten:

- (i) Ziehung mit Zurücklegen
- (ii) Ziehung ohne Zurücklegen

Satz 1.7

- (i) $n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^r$
- (ii) $P(n, r)$

Beispiele

3 Karten aus 52 Karten

- i) $52^3 = 140608$
- ii) $52 \cdot 51 \cdot 50 = 132600$

*Fundamentales Abzählprinzip

$$(a+b)^n = \sum_{\mu=0}^n \binom{n}{\mu} a^\mu \cdot b^{n-\mu} = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_r=n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot \dots \cdot a_r^{n_r}$$

$$\binom{10}{5, 3, 2, 2} = \text{nicht definiert} \quad \binom{7}{2, 3, 2} = 210$$

Definition 1.8

Es seien n unterscheidbare Objekte gegeben. Jede Auswahl von r Objekten heißt **r -Kombinatorik** (Bei der Auswahl kommt es nicht auf die Reihenfolge an). Die Anzahl der r -Kombinationen von n Objekten soll mit $C(n, r)$ bezeichnet werden. Jede r -Kombination einer Menge M mit $|M| = n$ entspricht bijektiv einer r -elementigen Teilmenge von M .

Satz 1.9

$$C(n, r) = \binom{n}{r}$$

Beweis

(Induktion über n)

IA: $n = r \quad C(r, r) = 1$
 $\binom{r}{r} = \frac{r!}{r! \cdot 0!} = 1$

IV: $C(n, r) = \binom{n}{r}$

IB: $C(n+1, r) = \binom{n+1}{r}$
 $M = \{1, 2, \dots, n, n+1\}$

Es gilt $|M \setminus \{n+1\}| = n$ und $\binom{n}{r-1}$ viele $r-1$ -elementige Teilmengen. Ist $X \subseteq M, |X| = r$, dann gibt es 2 Möglichkeiten $n+1 \in X$ und $n+1 \notin X$.

Wenn $n+1 \notin X$, dann $X \subseteq M \setminus \{n+1\}$.

Wenn $n+1 \in X$, dann ist $X \setminus \{n+1\} \subseteq M \setminus \{n+1\}$ ist $|X \setminus \{n+1\}| = r-1$.

Somit ist $C(n+1, r) = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$.

Beispiele

3 Männer aus 7, 2 Frauen aus 5

$$C(7, 3) \cdot C(5, 2) = \binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} = 35 \cdot 10 = 350$$

Definition 1.10

Gegeben sei eine Menge M mit $|M| = n$. Eine **geordnete Partition** von M in Teilmengen der Mächtigkeit n_1, n_2, \dots, n_k (mit $\sum_{i=1}^k n_i = n$) ist eine Folge von Mengen (A_1, A_2, \dots, A_r) mit $|A_i| = n_i$ und $\bigcup A_i = M, (A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j)$.

$$* = \sum_{n_1=0}^n \sum_{n_2=0}^n \sum_{n_3=0}^n \dots \sum_{n_r=0}^n (n_1, n_2, \dots, n_r = n)$$

Beispiele

$$|M| = 7$$

$$2, 3, 2 = (\underbrace{\{1, 2\}}_2, \underbrace{\{3, 4, 5\}}_3, \underbrace{\{6, 7\}}_2)$$

2001-01-12

Satz 1.11

M enthalte n Elemente. Es seien n_1, n_2, \dots, n_r Zahlen mit $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$. Dann gibt es $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}$ viele geordnete Partitionen von M , der Form (A_1, \dots, A_r) mit $|A_i| = n_i, i = 1, \dots, r$.

Beweis

Es gibt für A_1 $\binom{n}{n_1}$ viele Möglichkeiten, für A_2 gibt es $\binom{n-n_1}{n_2}$ Möglichkeiten usw.. Nach FABR. gilt:

Insgesamt gibt es

$$\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdot \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdot \dots \cdot \binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{r-1}}{n_r} = n = \sum_{i=1}^{n_r-1} -n_i$$

$$= \frac{n!}{n_1! \cdot (n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2! \cdot (n-n_1-n_2)!} \cdot \dots \cdot \frac{(n-n_1-\dots-n_{r-1})!}{n_r! \cdot \underbrace{(n-n_1-\dots-n_r)!}_{=n}}$$

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r! 0!}$$

Beispiele

i. $M = \{1, 2, \dots, 7\}$

$$\frac{7!}{2!3!2!} = 210$$

ii. 9 Geschenke, 4 Kinder. Das jüngste Kind erhält 3, alle anderen 2 Geschenke.

$$\frac{9!}{3!2!2!2!} = 7560$$

iii. Verschiedene Möglichkeiten des Kartengebens beim Skat:

$$\frac{32!}{2!10!10!10!} = \binom{32}{10} \binom{22}{10} \binom{12}{10} \binom{2}{2} \approx 2,75 \cdot 10^{15}$$

ungeordnete Partition $n, n_1, n_2, \dots, n_r, \sum n_i = n$

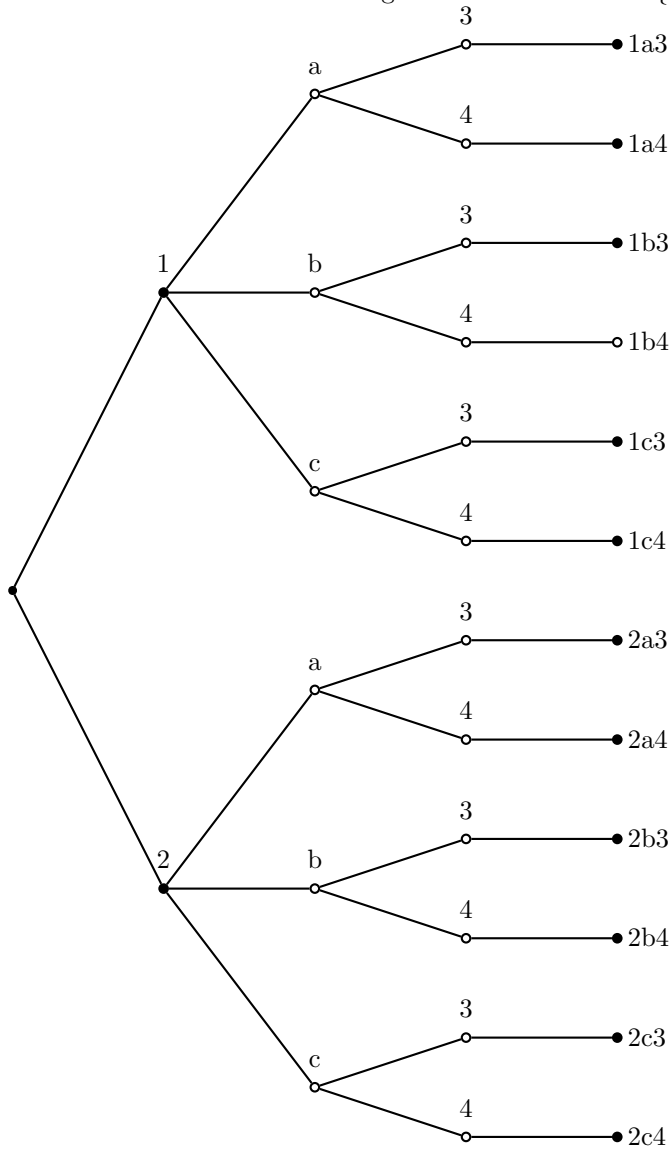
geordnet	(A_1, \dots, A_r)	$(1, 2) \neq (2, 1)$
ungeordnet	$\{A_1, \dots, A_r\}$	$\{1, 2\} = \{2, 1\}$

Anzahl der Partitionen die jeweils gleiche Anzahl an Elementen kommt zu geordneter Partition unter den Bruchstrich.

$$\left(\underbrace{20}_{n \text{ Elemente}}, \underbrace{4, 4}_{2 \times}, \underbrace{5, 5, 2}_{2 \times} \right) \Rightarrow \frac{20!}{\underbrace{4!4!5!5!2!}_{\text{geordnet}} \underbrace{2! 2!}_{2 \times 4 \quad 2 \times 5 \text{ ungeordnet}}}$$

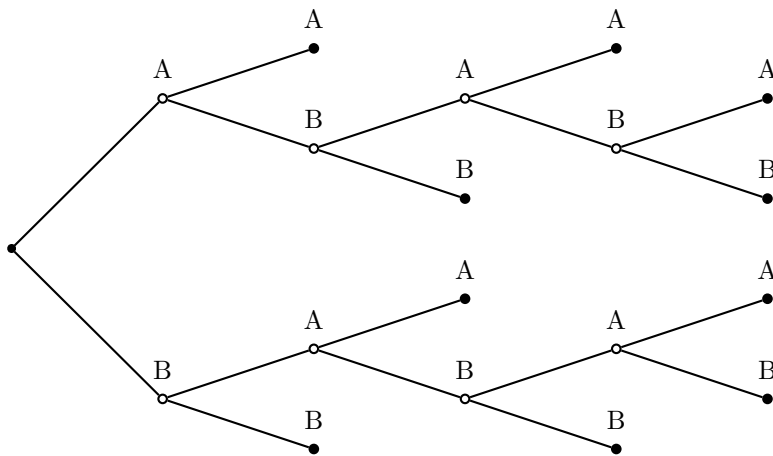
Ereignisbäume Beispiele

i. Man bestimme die Produktmenge $A \times B \times C$ mit $A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}, C = \{3, 4\}$.

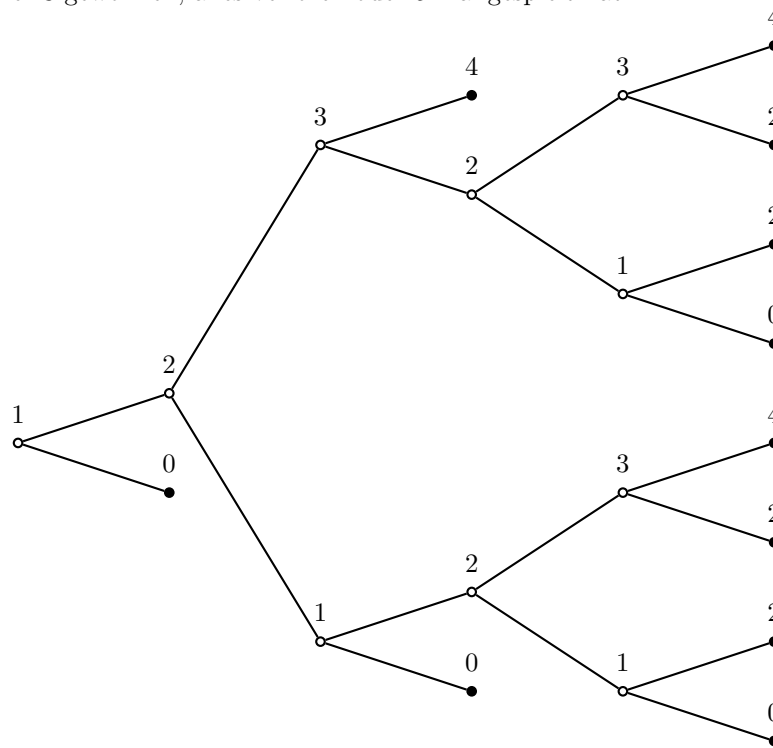


ii. 2 Spieler absolvieren eine Folge von Spielen. In jedem Spiel gibt es einen Gewinner. Folge ist beendet, wenn einer zweimal hintereinander oder einer dreimal insgesamt gewinnt.

Kapitel II: Wahrscheinlichkeitsrechnung



iii. Spieler spielt Roulette, fängt mit 1 Chip an er kann pro Spiel 1 verlieren/gewinnen spielt bis er 3 gewonnen, alles verloren oder 5-mal gespielt hat.



§ 2 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

A Modell der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Stichprobenraum , S ‘ Menge aller möglichen Ergebnisse

Stichprobenpunkt , $x \in S$ ‘ Element aus Stichprobenraum S (kurz Stichprobe)

Ereignis , $E \subseteq S$ ‘ Teilmenge des Stichprobenraums S

Elementarereignis , $\{a\}$ ‘ $\{a\}$, $a \in S$

\emptyset unmögliches Ereignis

S sicheres Ereignis

Verknüpfung von Ereignissen

$$(i) A, B \subseteq S \Rightarrow A \cup B \subseteq S$$

$$(ii) A, B \subseteq S \Rightarrow A \cap B \subseteq S$$

$$(iii) A, B \subseteq S \Rightarrow A^c = \overline{A} = S \setminus A \subseteq S$$

Definition 2.1

Zwei Ereignisse A und B schliessen sich gegenseitig aus, wenn $A \cap B = \emptyset$.

Beispiele

i) „Das Würfeln“

$$\begin{array}{lll} S = \{1, \dots, 6\} & A := \text{Es erscheint eine gerade Zahl} & \{2, 4, 6\} \\ & B := \text{ungerade Zahl} & \{1, 3, 5\} \\ & C := \text{Primzahl} & \{2, 3, 5\} \end{array}$$

ii) „Das Münze werfen“ $S = \{w, z\}$, $w = \text{Wappen}$, $z = \text{Zahl}$.

„Dreimal Münze werfen“ $S = \{wzz, z wz, \dots\}$

iii) Anzahl der Münze-Werfen, bis z erscheint.

$$S = \{1, 2, 3, \dots, \infty\}$$

∞ bedeutet das z nie erscheint.

2001-01-17

iv) In einem Quadrat wird ein Ball geworfen. Die Stichprobenpunkte sind die Punkte des Quadrats.

—BILD— S ist abzählbar

Hier kann man nur noch mittels der Ereignisse arbeiten.

2001-01-17

B Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie

Gegeben sei S ein Stichprobenraum, \mathcal{E} , die Klasse aller Ereignisse und $P : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. P heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung über S** und $P(A)$ **Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A \in \mathcal{E}$** , wenn folgende Axiome erfüllt sind:

$$[P_1] \quad \forall A \in \mathcal{E} (0 \leq P(A) \leq 1)$$

Kapitel II: Wahrscheinlichkeitsrechnung

$$[P_2] P(S) = 1$$

$$[P_3] A, B \in \mathcal{E}, A \cup B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$[P_4] A_1, A_2, \dots \in \mathcal{E}, A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j) \text{ Dann gilt } P\left(\bigcup_{i \geq 0} A_i\right) = \sum_{i \geq 0} P(A_i)$$

Hinweis

Aus 3 folgt nicht 4 und umgekehrt. Ist S endlich, dann ist 4 bedeutungslos.

Satz 2.2

$$1) P(\emptyset) = 0$$

$$2) P(A^C) = P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$3) A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$$

$$4) P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$5) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Beweis

$$\text{zu 1) } A \subseteq \mathcal{E}. \text{ Dann gilt } A \cap \emptyset = \emptyset. \text{ Nach 3: } \underbrace{P(A \cup \emptyset)}_{P(A)} = P(A) + P(\emptyset) \curvearrowright P(\emptyset) = 0$$

$$\text{zu 2) } 1 = P(S) = P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C) \curvearrowright P(A^C) = 1 - P(A)$$

$$\text{zu 3) Aus } A \subseteq B \text{ folgt } B = A \cup B \setminus A. \text{ Daraus folgt } P(B) = P(A) + P(B \setminus A), \text{ weil } A \cap (B \setminus A) = \emptyset. \\ \text{Aus 1: } P(A) \subseteq P(B)$$

$$\text{zu 4) } A = (A \setminus B) \cup (A \cap B). P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$$

$$\text{zu 5) —BILD—} \\ P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$$

Korollar 2.3

$A, B, C \in \mathcal{E}$.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Beweis

zweimal Anwenden von 2, 3, 5.

C Endliche Wahrscheinlichkeitsräume

Es sei S eine endliche Menge, z. B. $S = \{a_1, \dots, a_n\}$. Wir halten einen Wahrscheinlichkeitsraum, wenn jedem $a_i \in S$ eine Zahl p_i (die Wahrscheinlichkeit von a_i) zuordnen, so daß

$$(i) 0 \leq p_i \leq 1$$

$$(ii) \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Für $A \subseteq S$ gilt $P(A) := \sum_{a_i \in A} p_i$. Für $\{a_i\}$ gilt $P(\{a_i\}) = p_i$.

Beispiel

- 3 Münzen werfen:
 S -Anzahl der Zahlen, die oben liegen
 $S = \{0, 1, 2, 3\}$
 $p_0 = \frac{1}{2^3}, p_1 = \frac{3}{8}, p_2 = \frac{3}{8}, p_3 = \frac{1}{8}$
 A - wenigstens eine Zahl liegt oben $P(A) = \frac{7}{8}$
 B - nur Zahlen oder Wappen $P(B) = \frac{1}{4}$
- 3 Pferde A, B, C :
 A gewinnt doppelt so viele Rennen wie B .
 B gewinnt doppelt so viele Rennen wie C .
 $P(A) = \frac{4}{7}, P(B) = \frac{2}{7}, P(C) = \frac{1}{7}$.

D Laplace-Experiment (Laplace-Raum)

Ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, in dem jedes Elementereignis, die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, heißt **Laplace-Raum**. Ist $S = \{a_1, \dots, a_n\} \curvearrowright \underbrace{P(a_i)}_{P(\{a_i\})} = \frac{1}{n}$.

Beispiel

- Eine Karte von 52 (ohne Joker):
 A -Karo, B -Bild
 $P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{3}{13}, P(A \cap B) = \frac{3}{52}$.
- 12 Glühbirnen, davon 4 Defekte. Auswahl 2 Glühbirnen:

A : beide defekt: $P(A) = \frac{1}{11}$

B : beide in Ordnung: $P(B) = \frac{13}{33}$

C : wenigsten eine in Ordnung: $P(C) = \frac{19}{33}$

zu A : $\binom{12}{2}$ aller 2er Teilmengen
 $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{\frac{4!}{2!2!}}{\frac{12!}{2!10!}} = \frac{3 \cdot 2}{6 \cdot 11} = \frac{1}{11}$

zu B : $\binom{8}{2}$ alle 2er Teilmengen, die in Ordnung sind
 $\frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}} =$

zu C : $\binom{4}{2}$ alle 2er Teilmengen, die defekt sind
 $\frac{\binom{12}{2} - \binom{8}{2}}{\binom{12}{2}} =$

- n -Personen haben an verschiedenen Tagen Geburtstag:
 $P(\) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365 - n + 1)}{365^n}$ für $n \geq 23$ ist $P < \frac{1}{2}$, d.h. Wahrscheinlichkeit größer, daß 2 am gleichen Tag, als alle unterschiedlich.

Kapitel II: Wahrscheinlichkeitsrechnung

4. Auf dem Zahlenstrahl 2 Striche a, b zwischen -2 und 3 :
Wie $P(a - b > 3), a \in [-2, 0), b \in [0, 3]$. —BILD—
—noch-ein-BILD—

§ 3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit

Sei S ein Stichprobenraum, \mathcal{E} die Ereignisse, $P : \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung. Sei $E \in \mathcal{E}$ mit $P(E) > 0$ gegeben. Sei $A \in \mathcal{E}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit von A unter der Hypothese E ? Man definiert:

$$P(A|E) := \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

Sei S ein Laplace-Raum (S ist endlich und alle Elementarereignisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit).

$$\begin{aligned} |A| &:= \text{die Anzahl der Elemente in } A \\ P(A|E) &= \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{|A \cap E|}{|E|} \\ P(A \cap E) &= \frac{|A \cap E|}{|S|} \\ P(E) &= \frac{|E|}{|S|} \end{aligned}$$

E heißt reduzierter Raum.

Satz 3.1

Sei S ein Laplace-Raum, E, A beliebige Ereignisse mit $P(E) > 0$. dann gilt

$$\begin{aligned} P(A|E) &= \frac{\text{Anzahl der Elemente von } A \cap E}{\text{Anzahl der Elemente von } E} \\ &= \frac{\text{Anzahl der Möglichkeiten von } A \cap E}{\text{Anzahl der Möglichkeiten von } E} \end{aligned}$$

Beispiel

Es werden 2 Würfel geworfen. Bestimme unter der Hypothese, daß die Augenzahl 6 ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei einem Würfel die 2 oben liegt.

$$\begin{aligned} S &= \{(n, m) : 1 \leq n, m \leq 6, n \text{ liegt bei Würfel 1 oben und } m \text{ liegt bei Würfel 2 oben}\} \\ E &= \{6 \text{ ist die Augensumme}\} = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\} \\ A &= \{2 \text{ liegt bei einem Würfel oben}\} \\ A \cap E &= \{(2, 4), (4, 2)\} \\ P(A \cap E) &= \frac{|A \cap E|}{|E|} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

A Multiplikationssatz

Man multipliziert $P(A|E)$ mit $P(E)$: $P(A \cap E) = P(E) \cdot P(A|E) = P(E \cap A)$.

Satz 3.2

Seien E und A Ereignisse, so gilt

$$P(A \cap E) = P(E) \cdot P(A|E)$$

Kapitel II: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Korollar 3.3

Seien A_1, \dots, A_n Ereignisse, dann gilt

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Beweis

(durch Induktion) Anfang:

$$(n = 2) \quad P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1)$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) &= P((A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cap A_n) \\ &= P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cdot P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

Beispiel

Eine Warensendung von 12 Stück enthält 4 defekte. 3 Stück werden nacheinander zufällig entnommen. $A = \{\text{alle defekt}\}$.

Lösung: A_1, A_2, A_3 Ereignisse, $A_i = \{\text{i-te Stück ist nicht defekt}\}$.

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \\ P(A_1) &= \frac{8}{12} \\ P(A_2|A_1) &= \frac{7}{11} \\ P(A_3|A_1 \cap A_2) &= \frac{6}{10} \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{3}{5} = \frac{14}{55} \end{aligned}$$

B Zufallsprozesse und Ereignisse

Definition 3.4

Eine Folge von Experimenten, von denen jedes eine endliche Anzahl von zufälligen Realisationen besitzt, nennt man endlichen Zufallsprozeß.

Beispiel

Wir haben 3 Kartons mit folgendem Inhalt:

Karton I: 6 ganze und 4 defekte Glühbirnen

Karton II: 5 ganze und 1 defekte Glühbirnen

Karton III: 5 ganze und 3 defekte Glühbirnen

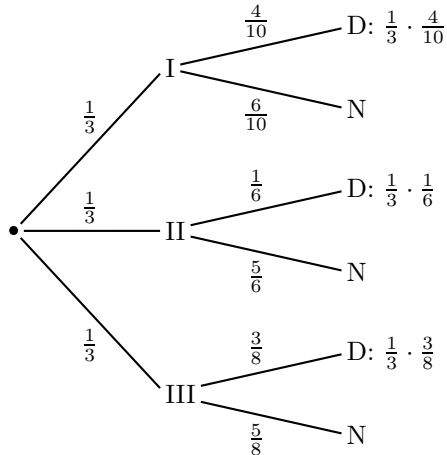
Wir bestimmen einen Karton zufällig und daraus nehmen wir dann eine Glühbirne. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Glühbirne defekt ist?

Wir haben eine Folge von 2 Experimenten:

1. Kartonauswahl (zufällig)

2. Zufallsauswahl einer Glühbirne

Der Prozeß ist mit einem Ereignisbaum beschreibbar:



Nach dem Multiplikationssatz ist die Wahrscheinlichkeit längs jedes Pfades des Baumes gleich dem Produkt der dazu gehörenden Wahrscheinlichkeiten.

Lösung: Wir haben 3 sich gegenseitig ausschließende Möglichkeiten eine defekte Glühbirne auszuwählen: die Summe $\frac{4}{30} + \frac{1}{18} + \frac{1}{8} = \frac{113}{360}$ ergibt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

C Partitionen und Bayes'sche Regel

Sei S ein Stichprobenraum und A_1, \dots, A_n eine Partition von S , d.h. $A_i \cap A_j \neq \emptyset$:

$$S = A_1 \cup \dots \cup A_n$$

Sei B ein beliebiges Ereignis:

$$\begin{aligned} B &= S \cap B = (A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap B \\ &= (A_1 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B) \\ \Rightarrow P(B) &= P(A_1 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) \text{ und } (A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \emptyset \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

somit gilt

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \dots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)$$

Wir betrachten die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \dots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}$$

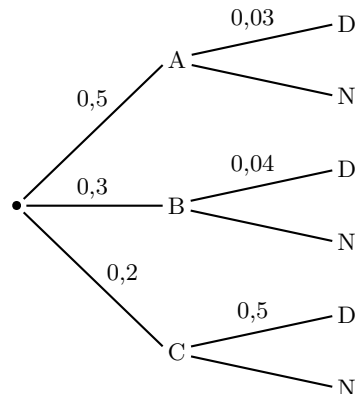
Satz 3.5

Seien A_1, \dots, A_n Partitionen von S und B ein beliebiges Ereignis. Dann gilt die **Bayes'sche Regel**.

Beispiel

Die Glühbirnenproduktion ist in einer Fabrik auf 3 Maschinen A, B und C zu 50%, 30% und 20% verteilt. Die einzelnen Maschinen arbeiten mit einem Ausschußanteil von 3%, 4% und 5%.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Glühbirne aus der Produktion defekt ist?



$$\begin{aligned}
 P(X) &= P(A) \cdot P(X|A) + P(B) \cdot P(X|B) + P(C) \cdot P(X|C) \\
 &= 0,5 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,2 \cdot 0,05 = 0,037
 \end{aligned}$$

2. Bestimme unter der Annahme, daß eine defekte Glühbirne ausgewählt wurde, die Wahrscheinlichkeit, daß diese von Maschine A hergestellt wurde.

$$P(A|X) = \frac{P(A) \cdot P(X|A)}{P(X)} = \frac{0,5 \cdot 0,03}{0,037} \quad \text{mit Bayes'scher Regel}$$

2001-01-31

Ein Ereignis B heißt **unabhängig** von A , wenn $P(B) = P(B|A)$ gilt.

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

Definition 3.6

A und B heißen *unabhängig*, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

gilt.

Beispiel

3 maliges Münzwerfen:

$A := \{1. \text{ Wurf ist } z\}$

$B := \{2. \text{ Wurf ist } z\}$

$C := \{ \text{genau 2-mal hintereinander } z \}$

A, B unabhängig

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} = P(A \cap B)$$

$$P(C) = \frac{1}{4}$$

$$P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{8}$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

A, C unabhängig

$$P(B) \cdot P(C) = P(B \cap C) = \{wzz, zzw\}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Definition 3.7

Drei Ereignisse A, B, C heißen unabhängig, wenn

- (i) paarweise unabhängig und
- (ii) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

$i \not\Rightarrow ii$:

$S = \{2\text{-maliges Münzwerfen}\}$
 $A = \{1. \text{ Münze } z\} = \{zz, zw\}$
 $B = \{2. \text{ Münze } z\} = \{zz, wz\}$
 $C = \{\text{genau einmal } z\} = \{zw, wz\}$
 Dann gilt $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$
 $P(A \cap B) = \frac{1}{4}, P(A \cap C) = \frac{1}{4}, P(B \cap C) = \frac{1}{4}$
 $P(\underbrace{A \cap B \cap C}_{\emptyset}) = 0$

Definition 3.8

Es sei S ein Wahrscheinlichkeitsraum. Unter dem **n -fachen unabhängigen Produkt von S** (n -fachen unabhängigen Wiederholung von S) versteht man den Wahrscheinlichkeitsraum Γ , der aus allen n -Tupeln von Elementen aus S besteht mit $P((S_1, S_2, \dots, S_n)) = P(S_1) \cdot P(S_2) \cdot \dots \cdot P(S_n)$.

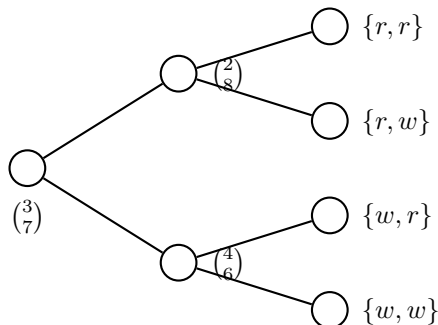
Beispiel

1. $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$
 Man berechne:

- (i) $P(A|B) = \frac{3}{4} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- (ii) $P(B|A) = \frac{1}{2} = P(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{2}$
- (iii) $P(A \cup B) = \frac{7}{12} = P(A) + P(B) - \frac{P(A \cap B)}{1}$
- (iv) $P(A^C|B^C) = \frac{5}{8}$
- (v) $P(B^C|A^C) = \frac{5}{6}$

2. Eine Urne mit 3 roten und 7 weißen Kugeln. Eine Kugel wird gezogen und danach eine Kugel (mit der anderen Farbe) in die Urne gelegt. Dann wird wieder eine Kugel gezogen.

- (i) P , daß die 2. Kugel rot ist.
- (ii) P , beide Kugel sind weiß, wenn bekannt ist, daß beide Kugeln die gleiche Farbe haben.



zu i: $\frac{6}{100} + \frac{28}{100} = \frac{17}{50}$

Kapitel II: Wahrscheinlichkeitsrechnung

zu ii: $\frac{P(A \cap E)}{P(E)}$, $E = \{ww, rr\}$

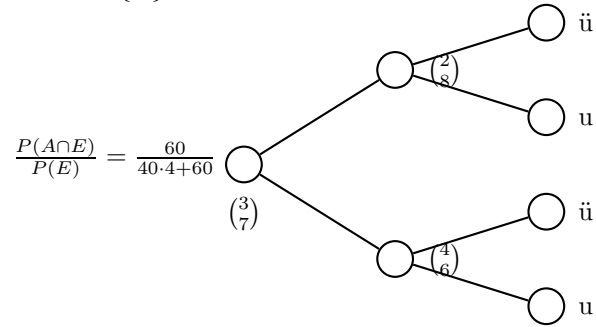
$$A \cap E = \{ww\}$$

$$\frac{P(A \cap E) = \frac{42}{100}}{P(E) = \frac{48}{100}} = \frac{7}{8}$$

3. $S = \{m, mu, w, wu\}$

$$E = \{m, w\}$$

$$A \cap E = \{w\}$$



§ 4 Zufallsvariable

$$(S, \Omega, P), \quad S \neq \emptyset, \quad \Omega \subseteq \wp(S), \quad P : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Definition 4.1

Eine Funktion

$$X : S \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad X^{-1}([a, b]) \in \Omega$$

heißt **Zufallsvariable**.

Hinweis

1. Ist S abzählbar, dann ist jede Funktion $X : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable.
2. Sind X, Y Zufallsvariablen: $S \rightarrow \mathbb{R}$ mit $k \in \mathbb{R}$, dann sind

$$(X + Y)(s) := X(s) + Y(s)$$

$$(X + k)(s) := X(s) + k$$

$$(k \cdot X)(s) := k \cdot X(s)$$

$$(X \cdot Y)(s) := X(s) \cdot Y(s)$$

ebenfalls Zufallsvariablen.

3.

$$P(X = a) := P(\{s \in S : X(s) = a\})$$

$$P(a \leq X \leq b) := P(\{s \in S : a \leq X(s) \leq b\})$$

$$P(X \leq a) := P(\{s \in S : X \leq a\})$$

$$P(X = a, Y = b) := P(\{s \in S : X(s) = a \wedge Y(s) = b\})$$

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) := P(\{s \in S : a \leq X(s) \leq b \wedge c \leq Y(s) \leq d\})$$

Definition 4.2 (Verteilung von X)

Es sei X eine Zufallsvariable von (S, Ω, P) und $X(S) = \{x_1, \dots, x_n\}$ endlich. Die Funktion

$$f : X(S) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x_i) := P(X = x_i)$$

heißt **Verteilung von X auf \mathbb{R}** .

Ist $X(S)$ endlich, dann kann f als Tabelle dargestellt werden:

x_1	x_2	\dots	x_n
$f(x_1)$	$f(x_2)$	\dots	$f(x_n)$

Klar: $f(x_i) \geq 0$, $\sum_{i=1}^n f(x_i) = 1$

Definition 4.3 (Erwartungswert)

Es seien X und f wie in 4.2. Dann heißt die Zahl

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot f(x_i)$$

Erwartungswert von X (oder auch **Mittelwert von X**) und wird mit $E(X)$ oder μ_X bezeichnet. (Wenn X klar ist, schreibt man auch E bzw. μ .)

Beispiele

1. Wurf mit zwei homogenen Würfeln

$$S = \{(1, 1), \dots, (6, 6)\}$$

$$X((a, b)) := \max(a, b)$$

$$X(S) = \{1, 2, \dots, 6\}$$

Für die Verteilung f ergibt sich:

$$f(1) = P(X = 1) = P(\{s \in S \mid X(S) = 1\}) = P(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{36}$$

$$f(2) = P(\{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}) = \frac{3}{36}$$

$$f(3) = P(\{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 2), (3, 1)\}) = \frac{5}{36}$$

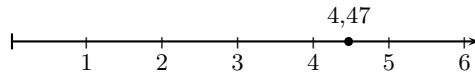
$$f(4) = \frac{7}{36}$$

$$f(5) = \frac{9}{36}$$

$$f(6) = \frac{11}{36}$$

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + \dots + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36} \approx 4,47$$



Für die Augensumme sehen Verteilung und Erwartungswert anders aus:

$$Y((a, b)) := a + b, \quad Y(S) = \{2, 3, \dots, 12\}$$

y_0	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$g(y_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E(Y) = 7$$

2. (Aus der Spieltheorie) Wurf eines Würfels. Mit einer Primzahl gewinnt der Spieler einen Betrag in Höhe der Augensumme (+), ansonsten muss er den Betrag zahlen (-).

x_i	2	3	5	-1	-4	-6
$f(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E = -\frac{1}{6} < 0$$

Viel Spaß beim Spielen.

3. Aus einer Kiste mit insgesamt 12 Gegenständen, von denen 3 defekt sind, werden 3 gezogen.

$$X(S) = \{0, 1, 2, 3\} \quad (\text{Anzahl der defekten gezogenen Objekte})$$

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	$\frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{9}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{84}{220}$	$\frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{9}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{108}{220}$	$\frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{9}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{27}{220}$	$\frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{220}$

$$E = 0,75$$

Satz 4.4

Es seien X, Y Zufallsvariablen und $k \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$(i) E(k \cdot X) = k \cdot E(X)$$

$$(ii) E(X + k) = E(X) + k$$

$$(iii) E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Korollar 4.5

$$E(X_1 + \dots + X_k) = E(X_1) + \dots + E(X_k)$$

Definition 4.6

Es seien X und f wie in Definition 4.2.

$$(i) \text{Var}(X) := \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2 \cdot f(x_i)$$

wobei μ_X der Mittelwert von X ist. $\text{Var}(X)$ nennt man die **Varianz von X** .

(ii) Die **Standardabweichung von X** , geschrieben σ_x , ist die Zahl

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Satz 4.7

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \sum x_i^2 \cdot f(x_i) - \mu_x^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

Beweis

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \sum (x_i - \mu_x)^2 \cdot f(x_i) \\ &= \sum (x_i^2 - 2x_i\mu_x + \mu_x^2) \cdot f(x_i) \\ &= \sum (x_i^2) \cdot f(x_i) - 2\mu_x \underbrace{\sum x_i f(x_i)}_{\mu_x} + \mu_x^2 \cdot \underbrace{\sum f(x_i)}_1 \\ &= E(X^2) - \underbrace{2\mu_x^2 + \mu_x^2}_{\mu_x^2} \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

□

Beispiel

Aus dem Würfelexperiment aus dem Beispiel 1 auf der vorherigen Seite wiederholen wir noch einmal die Verteilung:

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Kapitel II: Wahrscheinlichkeitsrechnung

und berechnen nun Varianz und Standardabweichung:

$$\begin{aligned}\mu &\approx 4,47 && \text{siehe oben} \\ E(X^2) &= 1^2 \cdot \frac{1}{36} + 2^2 \cdot \frac{3}{36} + \dots + 6^2 \cdot \frac{11}{36} = \frac{791}{36} \approx 21,97 \\ E(X)^2 &= (4,47)^2 \approx 19,98 \\ \text{Var}(x) &\approx 1,99 \\ \sigma_X &\approx 1,4\end{aligned}$$

Für Y aus dem gleichen Beispiel gilt $\text{Var}(Y) = 5,8, \sigma_Y = 2,4$.

Satz 4.8

Es sei X eine Zufallsvariable und $k \in \mathbb{R}$.

- (i) $\text{Var}(X + k) = \text{Var}(X)$
- (ii) $\text{Var}(k \cdot X) = k^2 \cdot \text{Var}(X)$
- (iii) $\sigma_{X+k} = \sigma_x, \sigma_{k \cdot X} = |k| \cdot \sigma_x$

2001-02-09

Bemerkung 4.9

Es sei X eine Zufallsvariable mit dem Mittelwert μ und der Standardabweichung $\sigma > 0$. Die Zufallsvariable

$$X^* := \frac{X - \mu}{\sigma}$$

heißt **standardisierte Zufallsvariable von X** .

Es gilt:

- $E(X^*) = 0$ und $\text{Var}(X^*) = 1$
- $E(X^*) = E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} E(X - \mu) = \frac{1}{\sigma} \underbrace{(E(x) - \mu_X)}_0 = 0$
- $\text{Var}(X^*) = \text{Var}\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \text{Var}(X - \mu_X) = \frac{1}{\sigma^2} \text{Var}(X) = \frac{\text{Var}(X)}{\text{Var}(X)} = 1$

A Verbundene Verteilungen

Es seien X, Y Zufallsvariablen definiert auf S mit $X(S) = \{x_1, \dots, x_n\}$ und $Y(S) = \{y_1, \dots, y_m\}$.

Der Produktraum ist

$$\begin{aligned}X(S) \times Y(S) &= \{(x_i, y_j) \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \\ P((x_i, y_i)) &:= P(X = x_i, Y = y_i)\end{aligned}$$

Die Funktion

$$h(x_i, y_j) := P((x_i, y_j))$$

heißt **verbundene Verteilung von X und Y** .

Dazu folgende Tabelle:*

*War hier nicht was falsch?

		Y				Σ
		y_1	y_2	\dots	y_m	
X	x_1	$h(x_1, y_1)$	$h(x_1, y_2)$	\dots	$h(x_1, y_m)$	$\sum_{j=1}^m h(x_1, y_j) = f(x_1)$
	x_2	$h(x_2, y_1)$	$h(x_2, y_2)$	\dots	$h(x_2, y_m)$	$f(x_2)$
	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\vdots
	x_n	$h(x_n, y_1)$	$h(x_n, y_2)$	\dots	$h(x_n, y_m)$	$f(x_n)$
		$\sum_{i=1}^n h(x_i, y_1) = g(y_1)$	$g(y_2)$	\dots	$g(y_m)$	

$$h(x_i, y_i) \geq 0, \quad \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} h(x_i, y_j) = 1$$

f ist die Verteilung von X , g ist die Verteilung von Y .

f und g heißen **Randverteilungen von h** . Diese sind die Verteilungen von X und Y .

Definition 4.10

Sind X, Y Zufallsvariablen mit den Mittelwerten μ_X und μ_Y und der Verbundenen Verteilung h , dann heißt die Zahl $\text{Cov}(X, Y)$ **Kovarianz von X und Y** und ist definiert als

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &:= \sum_{i,j} (x_i - \mu_X)(y_j - \mu_Y)h(x_i, y_j) \\ &= E((x - \mu_X)(y - \mu_Y)) \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \sum_{i,j} x_i y_j h(x_i, y_j) - \mu_X \mu_Y \\ &= E(X \cdot Y) - \mu_X \mu_Y \end{aligned}$$

Definition 4.11

Die **Korrelation von X und Y** ist definiert als

$$\rho(X, Y) := \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Es gilt:

- (i) $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$
- (ii) $-1 \leq \rho \leq 1$
- (iii) $\rho(X, X) = 1, \rho(X, -X) = -1$
- (iv) $\rho(aX + b, cY + d) = \rho(X, Y)$

Beispiel (Würfelbeispiel auf Seite 48 ZufallsvariableItem.109)

$$X((a, b)) := \max(a, b) \quad Y((a, b)) := a + b$$

Kapitel II: Wahrscheinlichkeitsrechnung

		Y											
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ
X	1	$\frac{1}{36}$	0	0									
	2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$									
	3	0	0	$\frac{2}{36}$									
	4	0	0	0									
	5	0	0	0									
	6	0	0	0									
Σ													

$$E(X \cdot Y) = \sum_{i,j} x_i \cdot y_j \cdot h(x_i, y_j) \approx 34,2$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - \mu_X \mu_Y \approx 2,9$$

$$\sigma_X = 1,4, \sigma_Y = 2,4$$

$$\rho(X, Y) = \frac{2,9}{1,4 \cdot 2,4} \approx 0,86$$

Beispiel

Es seien X, Y, X', Y' Zufallsvariablen mit folgenden verbundenen Verteilungen:

		Y					Y'		
		4	10	Σ			4	10	Σ
X	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	X'	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$		3	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
Σ		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		Σ		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$$E(X \cdot Y) = 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 10 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot 10 \cdot \frac{1}{4} = 14$$

$$E(X' \cdot Y') = 11$$

$$\mu_X = \mu_{X'} = 2 \quad \mu_Y = \mu_{Y'} = 7$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - \mu_X \mu_Y = 0$$

$$\text{Cov}(X', Y') = 11 - 14 = -3$$

Hinweis

Die Verallgemeinerung von zwei Zufallsvariablen auf n viele ist möglich, d. h. gegeben X_1, X_2, \dots, X_n :

$$X_1(S) = \{x_1^1, \dots, x_{n_1}^1\}$$

$$X_i(S) = \{x_1^i, \dots, x_{n_i}^i\}$$

$$h((x_{i_1}^1, x_{i_2}^2, \dots, x_{i_n}^n)) := P(X_1 = x_{i_1}^1, X_2 = x_{i_2}^2, \dots, X_n = x_{i_n}^n)$$

Definition 4.12

Es seien X, Y, \dots, Z (sic!) Zufallsvariablen definiert auf dem gleichen Stichprobenraum. Diese Zufallsvariablen heißen **unabhängig**, wenn für beliebige x_i, y_j, \dots, z_k gilt:

$$P(X = x_i, Y = y_j, \dots, Z = z_k) = h(x_i, y_j, \dots, z_k) \\ = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) \cdot \dots \cdot P(Z = z_k)$$

Beispiel

		Y			
		2	3	4	Σ
X	1	0,06	0,15	0,09	0,3
	2	0,14	0,35	0,21	0,7
	Σ	0,20	0,5	0,3	

X und Y sind in diesem Beispiel unabhängig, da da *alle* sechs Zahlen im Mittelteil der Tabelle (d. h. alle $h(x_i, y_j)$) gleich dem Produkt der jeweiligen beiden Randsummen sind.

2001-02-14

Satz 4.13

Es seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen. Dann gilt:

- i. $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$
- ii. $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$
- iii. $\text{Cov}(X, Y) = 0$
- iv. Kann auf endlich viele verallgemeinert werden, d.h. X_1, \dots, X_n unabhängig
 $\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)$

Definition 4.14

Es seien X, Y Zufallsvariablen definiert auf dem gleichen Raum S. Y heißt **Funktion** von X, wenn

$$Y(S) = \Phi(X(S))$$

für eine Funktion $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und alle $s \in S$ gilt.

- $Y = k \cdot X$
- $Y = X^2$
- $Y = X + K$
- $Y = (X + K)^2$

Satz 4.15

Es seien X, Y, Z Zufallsvariablen über S.

1. Gilt $Y = \Phi(X)$, dann gilt $E(Y) = \sum \Phi(x_i) \cdot f(x_i)$ wobei f die Verteilung von X ist.
2. Gilt $Y = \Phi(X, Z)$, dann gilt $E(Y) = \sum \Phi(x_i, z_j) \cdot h(x_i, z_j)$, h ist die gebundene Verteilung von X und Z.

Verallgemeinerung

Kapitel II: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Eine Zufallsvariable X heißt **diskret**, wenn $X(S)$ abzählbar ist.

$$\begin{aligned} X(S) &= \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\ X(S) &= \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \cup \{x_n\} \\ P(X(S)) &= P(\{x_1\}) + P(\{x_2\}) + \dots + P(\{x_n\}) \\ &= P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_n) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Man kann alle Werte, z.B. $E(X)$, Verteilung, $\text{Var}(X)$, $\sigma(X)$ analog definieren; diese brauchen aber nicht zu existieren.

Beispiel

2	4	8	16	...
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$...

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + 16 \cdot \frac{1}{16} \\ \Rightarrow E(X) &\text{ existiert nicht, geht gegen } \infty. \end{aligned}$$

B Allgemeine Theorie der Zufallsvariablen

$X : (S, \Omega, P) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $X^{-1}([a, b]) \in \Omega$, $\Omega \subseteq P(S)$ heißt Zufallsvariable.

Definition 4.16 (Verteilungsfunktion)

Die Funktion F definiert als

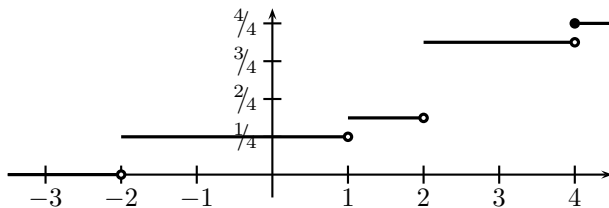
$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(a) := P(X \leq a)$$

heißt **Verteilungsfunktion** von X .

Beispiel

$$X(S) = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad F(a) = \sum_{x_i \leq a} f(x_i)$$

x_i	-2	1	2	4
$f(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$



Satz 4.17

Ist F Verteilungsfunktion von X , dann gilt

- i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(X) = 0$
- ii. $\lim_{x \rightarrow \infty} F(X) = 1$
- iii. F ist (schwach) monoton wachsend
- iv. F ist rechtsseitig stetig

Definition 4.18

Es sei X eine Zufallsvariable, F die Verteilungsfunktion von X . Gibt es eine integrierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

dann heißt f **Dichte** von X . (Hat X eine Dichte, dann heißt X stetig.)

i. $f(x) \geq 0$

ii. $\int_{\mathbb{R}} f(t) dt = 1$

iii. $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x) dx$

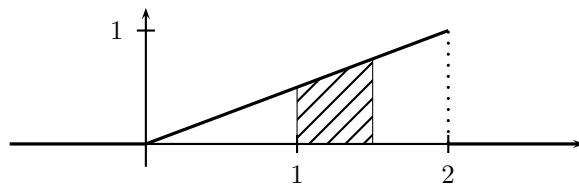
iv. $\text{Var}(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 f(x) dx$

Beispiel

Es sei X die stetige Zufallsvariable mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

i. Skizze:

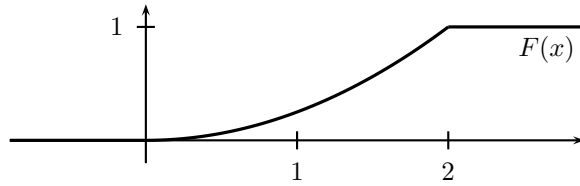


ii.

$$\begin{aligned} P(1 \leq x \leq 1.5) &= F(1.5) - F(1) \\ &= \int_1^{1.5} f(x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4} \cdot x^2 \right]_1^{1.5} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4} \\ &= \frac{5}{16} \end{aligned}$$

iii. Skizziere F :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ F(x) &= \begin{cases} 0: & x < 0 \\ \int_0^x f: & 0 \leq x \leq 2 \\ 1: & x > 2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \int_0^x \frac{1}{2} t dt : \quad 0 \leq x \leq 2 \\ &= \left[\frac{1}{4} \cdot t^2 \right]_0^x \end{aligned}$$



iv.

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{2} \cdot x^2 dx = \frac{4}{3}$$

v.

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot f(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{2} \cdot x^3 dx = 2$$

vi.

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - \mu^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9} \\ \sigma(X) &= \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Satz 4.19 (Čebyšev'sche Ungleichung)

Es sei X eine Zufallsvariable mit dem Mittelwert μ und der Standardabweichung σ . Dann gilt für $\varepsilon > 0$:

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Satz 4.20 (Das Gesetz der großen Zahlen)

Es seien X_1, X_2, \dots eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen identisch verteilt mit dem Mittelwert μ und der Varianz σ^2 . Ferner sei

$$\bar{s}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

(\bar{s}_n heißt Stichprobenmittel)

Dann gilt: $\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{s}_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0$.

Index

Symbole

Π_n , 6
 μ_X (Mittelwert), 47
 ρ (Korrelation), 51
 σ_x (Standardabweichung), 49
 l_ν (Lagrange-Grundpolynome), 6

A

Abzählprinzip, Fundamentales, 31
äquidistant, 12
äquidistante
 Zerlegung, 14
algebraische Interpolation, 6
Algorithmus
 de Casteljau, 24

B

Bernstein-Polynome, 18
 Differentiation, 20
Bezier-
 Darstellung, 20
 Koeffizienten, 20
 Polygon, 20
 Punkte, 20

C

$C(n, r)$, 33
Casteljau, de, Algorithmus, 24
Čebyšev-Polynome, 4
Čebyšev'sche Ungleichung, 56
Clenshaw-Algorithmus, 4
conv (konvexe Hülle), 22
Cov (Kovarianz), 51

D

de Casteljau, Algorithmus von, 24
Determinante
 Vandermonde, 7
Dichte, 55
Differenzen
 dividierte, 10
 vorwärts genommene, 12
diskret, 54
dividierte Differenzen, 10
Division mit Rest, 2

E

Elementarereignis, 37
Ereignis, 37
 unabhängiges, 44, 45
 n-faches Produkt, 45
 Verknüpfung, 37
Ereignisbaum, 35
Erwartungswert, 47
 $E(X)$ (Erwartungswert), 47

F

FAbP, 31
Faßregel, summierte Keplersche, 17
Fundamentales Abzählprinzip, 31
Funktion, 53
Funktionen
 stückweise polynomial, 28

G

geordnete Partition, 33
geordnete Stichprobe, 32
Gesetz der großen Zahlen, 56
Gewichte, 15
Grundpolynome
 Lagrange, 6
 Newton, 8

H

Hornersches Schema, 2
Hülle
 konvexe, 22

I

Interpolation, 14
 algebraische, 6
interpolatorische Quadraturformel, 15

K

Keplersche Faßregel
 summierte, 17
Knoten, 6
Kombinatorik, 33
kompakter Träger, 29
konvex, 21
konvexe Hülle, 22
Korrelation, 51

INDEX

Kovarianz, 51

L

Lagrange-Grundpolynome, 6

Laplace-Raum, 39

Leitkoeffizienten, 9

M

Mittelpunktregel, 14

Summierte, 14

Mittelwert, 47

N

Newton-Grundpolynome, 8

P

$P(n, r)$, 31

Partition

geordnete, 33

ungeordnet, 34

Permutation, 31

mit Wiederholungen, 32

Polygon

Bezier-, 20

Polynome

Bernstein-, 18

polynomial

stückweise Funktionen, 28

Q

Quadratur

mit Interpolation, 14

Quadraturformel

interpolatorische, 15

R

Randverteilung, 51

Rechteckregel, 14

Riemann

Summendefinition, 14

S

Schema

Hornersches, 2

Simpson-Regel, summierte, 17

Standardabweichung, 49

standardisierte Zufallsvariable, 50

Stichprobe, 37

geordnete, 32

Stichprobenpunkt, 37

Stichprobenraum, 37

stückweise polynomiale Funktionen, 28

Stützstellen, 6, 15

Stützwerte, 6

Summendefinition von Riemann, 14

Summierte Mittelpunktregel, 14

summierte Simpson-Regel, 17

Summierte Trapezregel, 14

T

Träger, kompakter, 29

Transformation

affine, 15

Trapezregel, 14

Summierte, 14

U

unabhängig

Zufallsvariablen, 53

ungeordnete Partition, 34

Ungleichung

Čebyševsche, 56

V

Vandermonde-Determinante, 7

$\text{Var}(X)$, 49

Varianz, 49

verbundene Verteilung, 50

Verknüpfung

von Ereignissen, 37

Verteilung, 47

verbundene, 50

Verteilungsfunktion, 54

vorwärts genommene Differenzen, 12

W

Wahrscheinlichkeit

Axiome der Theorie, 37

Räume

LaplaceLaplace-Raum, 39

Räume

endliche, 38

Verteilung P , 37

X

X^* (standardisierte Zufallsvariable), 50

Z

Zerlegung

äquidistante, 14

Zufallsvariable, 47

standardisierte, 50